Mohamed DIOURI

MATHEMATIQUES FINANCIERES

Cours et exercices corrigés

LES EDITIONS TOUBKAL

INSTITUT SUPERIEUR DU GENIE APPLIQUE

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Ce livre est conforme aux programmes du 1er cycle de la licence en sciences économiques, des écoles de gestion et de commerce. Il est programmé, en 1ère et 2ème années de la filière Management d'Entreprises de l'**Institut supérieur du Génie Appliqué, IGA.**

Notre **objectif**, en éditant ce livre, est de mettre à la disposition de l'étudiant un **outil de travail utile** auquel il peut se référer, chaque fois qu'il éprouve le besoin de se remémorer le cours et/ou de se rappeler les pratiques de calcul en mathématiques financières.

Ainsi, chaque chapitre comporte un ensemble d'exercices résolus et l'on trouvera, à la fin du livre, toute une partie consacrée, exclusivement à des exercices et des études de cas solutionnés, permettant à l'étudiant de pouvoir s'entraîner à **résoudre des problèmes de mathématiques financières**.

Nous nous sommes, aussi efforcés d'essayer de transmettre à l'étudiant **une méthode simple de résolution des problèmes de mathématiques financières** en adoptant, en permanence cette méthode, dans la présentation de nos solutions types.

Cette méthode est, par ailleurs, explicitée, à la fin du livre, dans une partie, entièrement réservée aux questions que peut se poser l'étudiant, lors de la résolution de problèmes de mathématiques financières.

Cette dernière partie comporte, en outre **toutes les tables financières** qui sont données dans une forme originale afin de rendre l'étudiant autonome, avec ce livre.

L'édition de ce livre entre dans le cadre de la politique de formation de l'**IGA**, qui en mettant à la disposition de ses étudiants de tels ouvrages didactiques, entend montrer que dans l'enseignement supérieur**, l'étudiant doit être accompagné et soutenu, dans sa quête du savoir.**

Mohamed DIOURI.
Président
Du Conseil Pédagogique de l'IGA.

PARTIE 1 - MATHEMATIQUES FINANCIERES A COURT TERME.

Cette partie s'intéresse aux cas de capitaux engagés pour des périodes inférieures à une année. Le court terme concerne donc des durées comptées en mois ou en jours.

CHAPITRE 1 - INTERET SIMPLE.

1.1. DEFINITION.

L'intérêt est le loyer de l'argent.

Quand on emprunte une somme d'argent C, appelée capital, pour une durée T, on doit rendre, à la fin de la durée, le capital C augmenté d'un intérêt I.

Cet intérêt I est calculé à partir du taux d'intérêt t et de la durée du prêt selon la formule suivante :

$$\mathbf{I = \frac{C \,.\, t \,.T}{100}} \qquad \textbf{(1.1)}$$

I : intérêt total payé à la fin de la durée T ;
C : capital prêté ou emprunté pour une durée T au taux t,
t : taux d'intérêt pour une période ;

T : durée du prêt (ou de l'emprunt) comptée en nombre de périodes (la période pouvant être un semestre, un trimestre, quelques mois, quelques jours, etc.)

Remarque 1 : La relation (1.1) est la formule générale de l'intérêt simple dans laquelle la période de référence est quelconque et le taux d'intérêt est celui relatif à cette période.

Remarque 2 : Dans la relation (1.1), comme dans toutes les relations suivantes de l'intérêt simple, il est opportun de soulever, dès maintenant, une particularité. En effet, la relation (1.1) contient le taux d'intérêt qui est, habituellement, donné en pourcentage, à savoir par exemple t = 9 % = 0,09, alors que dans la relation on utilise t = 9.

1.2. FORMULES DE L'INTERET SIMPLE.

La formule (1.1), relative au calcul de l'intérêt simple pour une durée T comptée en années est peu utilisée du fait que, par hypothèse, l'intérêt simple ne se calcule que pour des durées inférieures à l'année, c'est pourquoi nous donnons, dans ce qui suit, les formules de calcul de l'intérêt simple pour des durées comptées en m mois ou en n jours.

Pour ce faire, et partant de la formule (1.1), il suffit de la réécrire avec des données relatives au mois (respectivement au jour).

$$\mathbf{I = \frac{C\ t_m\ m}{100}} \quad \textbf{(1.1a)} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{I = \frac{C\ t_j\ n}{100}} \qquad \textbf{(1.1b)}$$

et de remplacer, par la suite, le taux mensuel t_m (respectivement le taux journalier t_j) par le taux annuel, noté habituellement t, en utilisant les formules de conversion :

$$\mathbf{t_m = \frac{t}{12}} \qquad \textbf{(1.2a) et} \qquad \mathbf{t_j = \frac{t}{360}} \qquad \textbf{(1.2b)}$$

Ainsi, la formule de calcul de l'intérêt simple pour m mois est :

$$\mathbf{I = \frac{C\,.\,t\,.\,m}{1\,200}} \qquad \textbf{(1.3)}$$

et la formule de calcul de l'intérêt simple pour n jours est :

$$\mathbf{I = \frac{C\,.\,t\,.\,n}{36\,000}} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Remarque 3 : Les formules (1.3) et (1.4) contiennent des données non homogènes ; en effet, elles utilisent toutes les deux le taux d'intérêt annuel t alors que la formules (1.3) utilise une durée comptée en mois (m mois) et la formule (1.4) utilise une durée comptée en jours (n jours).

Toutes ces formules permettent de calculer une des 4 données C, T, n ou m et I dès que les 3 autres sont connues. En effet :

Exemple 1.1. : Calcul de l'intérêt.

Quel est l'intérêt produit par un capital de 10 000 DH placé à un taux d'intérêt annuel de 9 % pendant une durée de 3 mois ?

Formalisons le problème posé.
Calculer I si C = 10 000 DH, t = 9% et m = 3 mois.

$$I = \frac{C\ t\ m}{1\ 200} = \frac{10\ 000 \times 9 \times 3}{1\ 200} = 225{,}00\ \text{DH}$$

Exemple 1.2. : Calcul du capital.

Quel est le capital qui, placé à un taux d'intérêt annuel de 9 % pendant une durée de 3 mois, produit un intérêt égal à 225 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer C si I = 225,00 DH, t = 9% et m = 3 mois.

$$C = \frac{1\ 200 \times I}{t\ .m} = \frac{1\ 200 \times 225}{9 \times 3} = 10\ 000{,}00\ \text{DH}$$

Exemple 1.3. : Calcul du taux d'intérêt.

Calculer le taux d'intérêt du capital de 50 000 DH qui, placé pendant une durée de 7 mois, produit un intérêt égal à 2770,80 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si C = 50 000 DH, I = 2770,80 DH et m = 7 mois.

$$t = \frac{1\ 200 \times I}{C\ m} = \frac{1\ 200 \times 2770{,}80}{50\ 000 \times 7} = 9{,}5\ \%$$

Exemple 1.4. : Calcul de la durée de placement.

Trouver la durée de placement d'un capital de 50 000 DH qui, placé à un taux de 9,5 % produit un intérêt égal à 2770,80 DH ?

Formalisons le problème.
Calculer T si C = 50 000 DH, t = 9,5% et I = 2770,80 DH.

$$\text{T en jours : n} = \frac{36\,000 \times \mathrm{I}}{\mathrm{C\ t}} = \frac{36\,000 \times 2770{,}80}{50\,000 \times 9{,}5} = 210 \text{ jours}$$

$$\text{T en mois : m} = \frac{1200 \times \mathrm{I}}{\mathrm{C\ t}} = \frac{1200 \times 2770{,}80}{50000 \times 9{,}5} = 7 \text{ mois}$$

Exemple 1.5. : Calcul de l'intérêt.

Quel est l'intérêt produit par un capital de 7 850 DH qui est placé à un taux d'intérêt de 9,75 % du 2 février au 23 avril de la même année ?

Avant de formaliser le problème, nous devons calculer le nombre de jours compris entre le 2 février et le 23 avril de la même année.

Entre le 2 et le 28 février, il y a 26 jours ;
Du 1er au le 31 mars, il y a 31 jours ;
Du 1er au le 23 avril, il y a 23 jours ;
Ainsi, n = 26 + 31 + 23 = 80 jours.

Formalisons, maintenant, le problème posé.
Calculer I si C = 7850 DH, t = 9,75 % et n = 80 jours.

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{C\ t\ n}}{36\,000} = \frac{7\,850 \times 9{,}75 \times 80}{36\,000} = 1\,70{,}08 \text{ DH}$$

Remarque 4 : On ne compte jamais le 1er jour, c'est pourquoi, il n'y a que 26 jours entre le 2 et le 28 février.

1.3. VALEUR ACQUISE D'UN CAPITAL.

La valeur acquise, notée VA, d'un capital placé à un taux d'intérêt t pour une durée T est égale à C + I ou I est l'intérêt que rapporte le capital C pendant la durée T.

On peut schématiser cela sur un axe du temps :

Temps

Aujourd'hui
Valeur = C

Instant T
Valeur = C + I

La relation générale qui donne la valeur acquise est :

$$\mathbf{VA = C + I = C + \frac{C\,.\,t\,.\,T}{100} = C\left(1 + \frac{t\,.\,T}{100}\right)} \qquad \mathbf{(1.5)}$$

Pour un capital placé pendant m mois, la valeur acquise est :

$$\mathbf{VA = C + I = C + \frac{C\,.\,t\,.\,m}{1\,200} = C\left(1 + \frac{t\,.\,m}{1\,200}\right)} \qquad \mathbf{(1.6)}$$

Pour un capital placé pendant n jours, la valeur acquise est :

$$\mathbf{VA = C + I = C + \frac{C\,.\,t\,.\,n}{36\,000} = C\left(1 + \frac{t\,.\,n}{36\,000}\right)} \qquad \mathbf{(1.7)}$$

Exemple 1.6. : Calcul de la valeur acquise.
Calculer la valeur acquise d'un capital de 8 000 DH placé à un taux d'intérêt de 11 % pendant 7 mois.

Formalisons le problème posé.
Calculer VA si C = 8 000 DH, t = 11 % et m = 7 mois.

$$VA = 8\,000 + \frac{8\,000 \times 11 \times 7}{1\,200} = 8513{,}33 \text{ DH}$$

Exemple 1.7. : Calcul du capital placé.
Un capital placé à un taux de 10,50 %, pendant 215 jours, acquiert une valeur égale à 12 512,15 DH. Quelle est sa valeur ?

Formalisons le problème posé.
Calculer C, si VA = 12 512,15 DH, t = 10,50 % et n = 215 jours.

La relation (1.7) donne C en fonction de VA, t et n :

$$C = \frac{VA}{1 + \frac{t\,n}{36\,000}} = \frac{12\,512{,}15}{1 + \frac{10{,}50 \times 215}{36\,000}} = 11\,773{,}83 \text{ DH}$$

Exemple 1.8. : Calcul du taux d'intérêt.
A quel taux d'intérêt faut-il placer un capital de 10 000 DH pour qu'il acquière, au bout de 90 jours, la valeur de 10 225 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t, si C = 10 000 DH, VA = 10 225 DH et n = 90 jours.

La relation (1.7) donne t en fonction de C, VA et n :

$$t = \frac{36\,000\,(VA - C)}{C\,n} = \frac{36\,000\,(10\,225 - 10\,000)}{10\,000 \times 90} = 9\ \%$$

Exemple 1.9. : Calcul de la durée de placement.

Un capital de 9 700 DH, placé à un taux de 8,50 %, l'an, acquiert une valeur de 10 000 DH. Quelle est sa durée de placement ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n, si C = 9 700 DH, VA = 10 000 DH et t = 8,50 %.

La relation (1.7) donne n en fonction de C, VA et t :

$$n = \frac{36\,000\ (\ VA - C\ )}{C\ t} = \frac{36\,000\ (\ 10\,000 - 9\,700\ )}{9\,700 \times 8{,}5} = 131 \text{ jours}$$

Nous avons arrondi le résultat au nombre entier juste supérieur du fait qu'il s'agit d'un nombre de jours qui doit être entier.

1.4. TAUX MOYEN DE PLACEMENT.

Considérons deux capitaux C_1 et C_2 engagés respectivement pendant T_1 et T_2 à des taux d'intérêts t_1 et t_2, le taux d'intérêt moyen t_{moy} est celui qui, appliqué aux deux capitaux, pendant respectivement les durées T_1 et T_2, donne le même intérêt I :

Calcul de I avec t_1 et t_2 :

$$I = \frac{C_1\ t_1\ T_1 + C_2\ t_2\ T_2}{100}$$

Calcul de I avec t_{moy} :

$$I = \frac{C_1\ t_{moy}\ T_1 + C_2\ t_{moy}\ T_2}{100}$$

D'après la définition I est le même, donc :

$C_1\ t_{moy}\ T_1 + C_2\ t_{moy}\ T_2 = C_1\ t_1\ T_1 + C_2\ t_2\ T_2$

d'où l'on peut tirer t_{moy} pour T quelconque.

$$\mathbf{tmoy} = \frac{\mathbf{C_1\ t_1\ T_1 + C_2\ t_2\ T_2}}{\mathbf{C_1\ T_1 + C_2\ T_2}} \qquad \mathbf{(1.8)}$$

Cette formule peut être étendue pour des périodes comptées en mois ou en jours :

- En mois : $$\mathbf{tmoy} = \frac{\mathbf{C_1\ t_1\ m_1 + C_2\ t_2\ m_2}}{\mathbf{C_1\ m_1 + C_2\ m_2}} \qquad \mathbf{(1.9a)}$$

- En jours : $$\mathbf{tmoy} = \frac{\mathbf{C_1\ t_1\ n_1 + C_2\ t_2\ n_2}}{\mathbf{C_1\ n_1 + C_2\ n_2}} \qquad \mathbf{(1.9b)}$$

Les formules (1.9) peuvent être aussi étendues à N capitaux :

- En mois : $$\mathbf{tmoy} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{i=N}} \mathbf{C_i\ t_i\ m_i}}{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{i=N}} \mathbf{C_i\ m_i}} \qquad \mathbf{(1.10a)}$$

- En jours $$\mathbf{tmoy} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{i=N}} \mathbf{C_i\ t_i\ n_i}}{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{i=N}} \mathbf{C_i\ n_i}} \qquad \mathbf{(1.10b)}$$

Exemple 1.10. : Calcul du taux moyen de placement.

Calculer le taux d'intérêt moyen de 3 capitaux C1, C2 et C3 placés comme suit :

C_1 = 10 000 DH, t_1 = 9 % et m_1 = 8 mois ;
C_2 = 5 000 DH, t_2 = 11 % et m_2 = 5 mois ;
C_3 = 7 500 DH, t_3 = 10 % et m_3 = 7 mois.

La formalisation du problème posé est déjà faite.

En appliquant la relation (1.10b) avec les données :

$$t_{moy} = \frac{1\,000 \times 9 \times 8 + 5\,000 \times 11 \times 5 + 7\,500 \times 10 \times 7}{1\,000 \times 8 + 5\,000 \times 5 + 7\,500 \times 7} = 10{,}20\ \%$$

Exemple 1.11. : Calcul de la durée de placement.

Deux capitaux de valeur 10 000 DH et 12 500 DH sont placés, respectivement, l'un à 10 %, pendant 59 jours et l'autre à 11 %.

Quelle est la durée de placement du 2ème capital, sachant que le taux moyen de placement des deux capitaux est 10,25 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n_2 si C_1 = 10 000 DH, C_2 = 12 500 DH, n_1 = 59 jours, t_1 = 10 %, t_2 = 11 % et t_{moy} = 10,25 %.

La relation (1.9b) donne :

$$t_{moy} = \frac{C_1\ t_1\ n_1 + C_2\ t_2\ n_2}{C_1\ n_1 + C_2\ n_2}$$

$C_2\ n_2\ (t_{moy} - t_2) = C_1 n_1\ (t_1 - t_{moy})$

$$n_2 = \frac{C_1 n_1 (t_{moy} - t_1)}{C_2 (t_2 - t_{moy})} = \frac{10\,000 \times 59 \times 0{,}25}{12\,500 \times 0{,}75} = 16 \text{ jours}$$

Comme il s'agit de nombre de jours qui doit être entier, nous avons arrondi le résultat au nombre entier juste supérieur.

Exemple 1.12. : Calcul de la valeur d'un capital.

Un 1^er^ capital de 5 000 DH est placé, pendant 25 jours, à 9,75 %. Un 2^ème^ capital est placé, pendant 35 jours, à 10,25 %.

Quelle est la valeur du 2^ème^ capital si le taux moyen de placement des deux capitaux est 10 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C_2 si C_1 = 5 000 DH, n_1 = 25 jours, t_1 = 9,75 %, n_2 = 35 jours et t_{moy} = 10 %.

La relation (1.9b) donne :

$$t_{moy} = \frac{C_1\ t_1\ n_1 + C_2\ t_2\ n_2}{C_1\ n_1 + C_2\ n_2}$$

$$C_2\ n_2\ (t_{moy} - t_2) = C_1 n_1\ (t_1 - t_{moy})$$

$$C_2 = \frac{C_1 n_1 (t_{moy} - t_1)}{n_2 (t_2 - t_{moy})} = \frac{5\,000 \times 25 \times 0{,}25}{35 \times 0{,}25} = 3\,571{,}43 \text{ DH}$$

1.5. LES COMPTES D'INTERETS.

Les comptes d'intérêts sont des comptes ouverts auprès d'institutions financières (banques, poste, etc.). Au Maroc, il y a deux types de comptes d'intérêts :

- Les comptes courants bancaires qui, d'après la nouvelle loi bancaire ne produisent pas d'intérêts s'ils sont créditeurs, mais supportent des intérêts s'ils sont débiteurs ;

- Les comptes sur carnets qui sont ouverts auprès des banques et des guichets de la poste et qui ne peuvent être que créditeurs et donc producteurs d'intérêts.

Nous allons donner, ci-après les règles de tenue de ces comptes :

- Déterminer la date de valeur de chaque opération :
  * Pour les comptes bancaires, elle est égale à j+2 ou + 3 lors d'un dépôt et j-1 lors d'un retrait en espèce ou par chèque sur place.
  * Pour les comptes sur carnets, elle est fixée le 16 ou le 31 qui précédent un retrait et le 15 ou 1er qui suivent un versement.
- Déterminer le nombre de jours séparant deux opérations consécutives.
- Calculer l'intérêt pour chaque solde. Cet intérêt est débiteur dans le cas des comptes bancaires et créditeurs dans le cas des comptes sur carnets.
- Intégrer le total des intérêts au solde, à la date de l'arrêté du compte.

Cet arrêté du compte est mensuel pour les comptes bancaires sur chèque et trimestriel pour les comptes sur carnets.

Exemple 1.13. : Arrêté d'un compte bancaire.

M. ZNIBER a un compte courant auprès de la Banque Populaire, il effectue les opérations suivantes :

Dates	Opérations	Montants en DH
Le 30/09	*Solde du compte*	*12 300,00*
Le 05/10	*Retrait d'un chèque*	*15 200,00*
Le 21/10	*Versement espèce*	*1 500,00*
Le 03/11	*Retrait d'un chèque*	*5 250,00*
Le 17/11	*Versement d'un chèque sur place*	*1 200,00*
Le 04/12	*Versement d'un chèque*	*10 000,00*
Le 15/12	*Versement d'un chèque*	*2 500,00*

Etablir le solde du compte, au 31/12, si le taux d'intérêt du découvert est t = 11,50 %, et la date de valeur d'un chèque sur place est j + 3.

Le tableau des calculs récapitulatifs de l'arrêté du compte bancaire de M. ZNIBER est donné à la page 24.

Tableau d'arrêté du compte bancaire de M. ZNIBER, au 31/12.

Dates opérations	Opérations		Dates de valeurs	Nombre de jours	Soldes du compte		Intérêts débiteurs
	Intitulés	Montants DH			Débit	Crédit	
30/09	Solde	15 000,00	30/09	04		15 000,00	
05/10	Retrait chèque	25 000,00	04/10	18	10 000,00		57,50
21/10	Versement espèce	1 500,00	22/10	10	8 500,00		27,15
03/11	Retrait chèque	5 250,00	02/11	18	13 750,00		79,06
17/11	Versement chèque sur place	1 200,00	20/11	17	12 550,00		68,15
04/12	Versement chèque sur place	10 000,00	07/12	11	2 550,00		0,96
15/12	Versement chèque sur place	2 800,00	18/12	13		250,00	
31/12	Total des intérêts	232,80	31/12	. . .		17,18	

On n'a considéré que les intérêts débiteurs du fait de la loi bancaire qui interdit les intérêts pour les comptes bancaires créditeurs.

Pour le calcul des intérêts débiteurs, nous avons utilisé la relation (1.4) ; par exemple, dans le cas du calcul des intérêts dûs pour le solde de 13 750,00 DH, pendant 18 jours sont :

$$I = \frac{C\ t\ n}{36\ 000} = \frac{13\ 750 \times 11{,}50 \times 18}{36\ 000} = 79{,}06\ \text{DH}$$

Le total des intérêts est fait le 31/12 pour être reporté sur le solde.

Le solde bancaire, au 31/12, du compte de M. ZNIBER, est donc de 17,18 DH.

Exemple 1.14. : Arrêté d'un compte sur carnet.

M. ATIQ a un compte sur carnet à la B.C.M. Trouver le solde de son compte au 30/06 s'il réalise les opérations suivantes :

On suppose le taux d'intérêt t = 6 % et le prélèvement fiscal libératoire égal à 30 %.

Dates	Opérations	Montants
Le 31/03	*Solde*	*25 450,00*
Le 06/04	*Versement*	*4 550,00*
Le 18/04	*Retrait*	*10 000,00*
Le 20/05	*Versement*	*2 500,00*
Le 28/05	*Retrait*	*21 000,00*
Le 12/06	*Versement*	*3 750,00*
Le 17/06	*Versement*	*43 000,00*
Le 20/06	*Retrait*	*13 450,00*

Le tableau récapitulatif des calculs des intérêts est :

Dates	Opérations		Soldes en DH	Dates valeur	Nbre jours	Intérêts en DH
	Intitulé	en DH				
31/03	Solde		25 450	31/03	15	63,63
06/04	Verse	4 550	30 000	15/04		
18/04	Retrait	10 000	20 000	15/04	30	100,00
20/05	Verse	2 500	22 500	15/05		
28/05	Retrait	21 000	1 500	15/05	15	3,75
12/06	Verse	3 750	5 250	01/06	15	13,12
17/06	Verse	43 000	48 250	15/06		
20/06	Retrait	13 450	34 800	15/06	15	87,00
Total des intérêts créditeurs						**267,50**
Prélèvement fiscal 30 %						**80,25**
Solde du compte au 30/06						**34 880,25**

Exemple 1.15. : Etude de cas : Arrêté d'un compte bancaire.

M. ADIL a un compte chèque auprès de la B.M.C.I., il effectue les opérations listées dans le tableau suivant.

Etablir le solde du compte, au 30/11, si le taux d'intérêt du découvert est t = 10 %.

La date de valeur d'un versement pour un chèque sur place est de j + 3 et pour un chèque hors place de j + 15.

Dates	Opérations	Montants en DH
Le 31/10	*Solde du compte*	*2 300,00*
Le 05/11	*Retrait d'un chèque*	*5 200,00*
Le 06/11	*Versement espèce*	*4 500,00*
Le 07/11	*Retrait d'un chèque*	*5 750,00*
Le 10/11	*Versement d'un chèque sur place*	*1 200,00*
Le 15/11	*Versement d'un chèque hors place*	*2 500,00*
Le 20/11	*Retrait espèce*	*15 000,00*
Le 25/11	*Versement d'un chèque sur place*	*13 500,00*

Le tableau des calculs récapitulatifs de l'arrêté du compte sur carnet de M. ATTIQ est donné à la page 27.

La méthode utilisée, ci-dessus pour établir l'arrêté d'un compte s'appelle «méthode hambourgeoise», elle consiste à transcrire, chronologiquement, les opérations et ce qui en découle. Elle s'adapte bien à l'utilisation de logiciels gestionnaires de tableaux.

Exemple 1.16. : Calcul d'un capital et du taux d'intérêt.

Un capital placé voit sa valeur acquise s'élever à 10 050 DH, après 20 jours et à 10 125 DH, après 50 jours. Quelle est sa valeur et quel est le taux d'intérêt auquel il est placé ?

Tableau d'arrêté du compte bancaire de M. ADIl, au 30/11.

Dates opérations	Opérations		Dates de valeurs	Nombre de jours	Soldes du compte		Intérêts débiteurs
	Intitulés	Montants DH			Débit	Crédit	
31/10	Solde	2 300,00	31/10	04		2 300,00	
05/11	Retrait chèque	5 200,00	04/11	02	2 900,00		1,61
07/11	Retrait chèque	5 750,00	06/11	01	8 650,00		2,40
06/11	Versement espèce	4 500,00	07/11	06	4 150,00		6,92
10/11	Versement chèque sur place	1 200,00	13/11	06	2 950,00		4,92
20/11	Retrait chèque	15 000,00	19/11	09	17 950,00		44,88
25/11	Versement chèque sur place	13 500,00	28/11	02	4 450,00		2,47
15/11	Versement chèque hors place	2 500,00	30/11	00	1 950,00		
30/11	Total des intérêts	63,20			2 013,20		

Dans ce cas, on a commencé, pour la clarté des calculs, par classer les opérations selon leur date de valeur. Cette opération est très importante.

On n'a considéré que les intérêts débiteurs du fait de la loi bancaire qui interdit les intérêts pour les comptes bancaires créditeurs.

Pour le calcul des intérêts débiteurs, nous avons utilisé la relation (1.4) ; par exemple, dans le cas du calcul des intérêts dûs pour le solde de 2 950,00 DH, pendant 6 jours sont :

$$I = \frac{C\ t\ n}{36\ 000} = \frac{2\ 950 \times 10 \times 9}{36\ 000} = 4{,}92\ \text{DH}$$

Le total des intérêts est fait le 30/11 pour être reporté sur le solde.

Le solde bancaire, au 30/11, du compte de M. ADIL, est donc de 2 013,20 DH.

Formalisons le problème posé.

Calculer C et t si VA1 = 10 050 DH, n1 = 20 jours, VA2 = 10 125 DH et n2 = 50 jours.

La relation (1.7) donne :

$$VA_1 = C + \frac{C\ t\ n_1}{36\,000} = C + \frac{20\ C\ t}{36\,000} = 10\,050$$

$$VA_2 = C + \frac{C\ t\ n_2}{36\,000} = C + \frac{50\ C\ t}{36\,000} = 10\,125$$

En retranchant membre à membre, on trouve :

$$\frac{30\ C\ t}{36\,000} = 75 \quad => \quad \frac{C\ t}{36\,000} = 2{,}5$$

En reportant ce résultat dans l'une des deux relations, on a :

C = 10 050 – 20 x 2,5 = 10 000 DH et t = 9 %

Nous reviendrons sur les comptes d'intérêts, lorsque nous aborderons, dans le prochain chapitre l'escompte commercial à intérêt simple.

CHAPITRE 2 - L'ESCOMPTE COMMERCIAL A INTERET SIMPLE.

2.1. DEFINITION.

L'escompte commercial concerne la négociation des effets de commerce.

Un effet de commerce est un moyen de paiement, il se caractérise par :

- Sa valeur nominale V qui est la somme à payer à l'échéance ;
- Son échéance qui est le jour de son paiement.

La négociation d'un effet de commerce consiste à payer cet effet avant son échéance, cette avance d'argent se fait moyennant un intérêt appelé escompte E.

La formule de l'escompte est :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{V \cdot t \cdot T}}{\mathbf{100}} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

E : montant de l'escompte,
V : valeur nominale de l'effet,
t : taux d'escompte relatif à une période,

T : durée de l'escompte comptée en périodes. Cette durée est comptée à partir du moment de la négociation jusqu'à la date d'échéance de l'effet.

L'escompte est donc l'intérêt d'un capital donné en avance.

L'escompte est facturé en début de période, alors que l'intérêt n'intervient qu'en fin de période.

2.2. FORMULES DE L'ESCOMPTE.

La relation (2.1) calcule l'escompte pour des durées comptées en périodes. Elle est surtout utilisée pour des durées comptées en mois ou jours, et les taux d'intérêt correspondants.

$$\mathbf{E = \frac{V.t.m}{100} \quad ou \quad \frac{V.t.j.n.}{100} \qquad (2.1\ bis)}$$

Formule d'escompte pour T en m mois :

$$\mathbf{E = \frac{V\,.\,t\,.\,m}{1\,200} \qquad (2.2)}$$

Formule d'escompte pour T en n jours :

$$\mathbf{E = \frac{V\,.\,t\,.\,n}{36\,000} \qquad (2.3)}$$

Les formules de l'escompte pour des durées comptées en mois ou jours se déduisent facilement de la relation (2.1 bis) en remplaçant t_m (taux mensuel) et t_j (taux journalier) par les relations (1.2a) et (1.2b) déjà signalées au chapitre 1.

Toutes ces formules permettent de calculer une des 4 données E,V, n ou m et t dès que l'on connaît les 3 autres. En effet :

Exemple 2.1. : Calcul de l'escompte.

Calculer l'escompte d'un effet de valeur nominale 10 000 DH ayant un taux d'escompte de 10 % et une échéance à 56 jours.

Formalisons le problème posé.

Calculer E si V = 10 000 DH, t = 10 % et n = 56 jours.

$$E = \frac{V\ t\ n}{36\ 000} = \frac{10\ 000 \times 10 \times 56}{36\ 000} = 155{,}56 \text{ DH}$$

Exemple 2.2. : Calcul du taux d'escompte.

Calculer le taux d'escompte d'un effet de valeur nominale 5 200 DH et ayant produit un escompte égal à 200,20 DH pour une échéance de 4 mois.

Formalisons le problème.

Calculer t si E = 200,20 DH V = 5 200 DH, et m = 4 mois.

$$t = \frac{1\ 200 \times E}{V\ m} = \frac{1\ 200 \times 200{,}20}{5\ 200 \times 4} = 11{,}55\ \%$$

Exemple 2.3. : Calcul de la valeur nominale.

Quelle est la valeur nominale d'un effet qui, escompté à un taux de 9,50 % pour une échéance de 56 jours, produit un escompte égal à 345,50 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer V si t = 9,50 %, E = 345,50 DH et N = 56 jours.

$$V = \frac{36\,000 \times E}{t\ m} = \frac{36\,000 \times 345{,}50}{9{,}50 \times 56} = 23\,379{,}70 \text{ DH}$$

Exemple 2.4. : Calcul de la durée d'escompte.

Un effet de valeur nominale 7 694,17 DH est escompté à un taux de 9,25 %. Quelle est sa date d'échéance si la banque prélève 19,77 DH d'escompte ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si V = 7 694,27 DH, t = 9,25 %, et E = 19,77 DH.

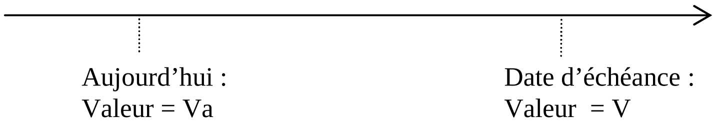
$$n = \frac{36\,000 \times E}{C\ t} = \frac{36\,000 \times 19{,}77}{7\,694{,}27 \times 9{,}25} = 10 \text{ jours}$$

2.3. VALEUR ACTUELLE.

La valeur actuelle est la valeur à laquelle se négocie, aujourd'hui l'effet, c'est-à-dire la valeur par laquelle l'effet est remplacé.

La valeur actuelle, notée Va, d'un effet négocié est égale à sa valeur nominale diminuée du montant de l'escompte.

$$\mathbf{Va = V - E} \qquad \mathbf{(2.4)}$$



En remplaçant E par ses expressions indiquées dans les formules (2.2) et (2.3), la formule de la valeur actuelle, pour des durées comptées en m mois ou en n jours devient :

$$\mathbf{Va = V - \frac{V\ t\ m}{1\ 200} = V - \frac{V\ t\ n}{36\ 000}} \qquad \mathbf{(2.5)}$$

Exemple 2.5. : Calcul de la valeur actuelle.

Calculer la valeur actuelle d'un effet de valeur nominale 15 500 DH, négocié à un taux d'escompte de 10,50 % pour une échéance de 75 jours.

Formalisons le problème posé.

Calculer Va si V = 15 500 DH, t = 10,50 % et n = 75 jours.

Des relations (2.4) et (2.5) nous pouvons déduire :

$$\mathrm{Va} = \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V\ t\ n}}{36\ 000} = 15\ 500 - \frac{15\ 500 \times 10{,}50 \times 75}{36\ 000} = 15\,160{,}94\ \mathrm{DH}$$

Exemple 2.6. : Calcul de la valeur nominale.

Calculer la valeur nominale d'un effet qui, escompté à une valeur actuelle égale à 35 224,55 DH, au taux d'escompte de 8,75 %, le 13 décembre, sera échu le 25 février de l'année suivante.

Avant tout calcul, il convient de compter le nombre de jours entre le 13/12 et le 25/02 de l'année suivante.

Entre le 13/12 et le 31/12, il y a 18 jours ;
Du 1er/01 au 31/01, il y a 31 jours ;
Du 1er/02 au 25/02, il y a 25 jours ;
Ainsi n = 18 + 31 + 25 = 74 jours.

Formalisons, maintenant, le problème posé.
Calculer V si Va = 35 224,55 DH, t = 8,75 % et n = 74 jours.

Des formules (2.5) nous pouvons calculer V :

$$V = \frac{36\,000 \times Va}{36\,000 - t\,n} = \frac{36\,000 \times 35\,224{,}55}{36\,000 - 8{,}75 \times 74} = 35\,869{,}71 \text{ DH}$$

Remarque : La valeur actuelle d'un effet varie tous les jours. Elle augmente continûment jusqu'à atteindre, le jour de l'échéance, la valeur nominale de l'effet.

2.4. VALEUR NETTE.

La valeur nette, notée Vn, d'un effet est la somme effectivement mise à la disposition du détenteur de l'effet lors de sa négociation.

La valeur nette Vn est égale à la valeur actuelle Va diminuée des frais bancaires et de la TVA.

Les frais bancaires, pour la négociation d'un effet sont :

- Commission d'encaissement ;
- Commission d'acceptation ;
- La TVA de 7 %.

Les Agios sont l'ensemble des frais bancaires et de l'escompte.

$$\textbf{Agios = Escompte + Frais bancaires} \qquad \textbf{(2.6)}$$

La valeur nette est donnée par la relation :

$$\textbf{Vn = V – Agios = Va – Frais bancaires} \qquad \textbf{(2.7)}$$

2.5. TAUX REEL D'ESCOMPTE.

Les relations (2.6) et (2.7) montrent, en fait que lors de la négociation d'un effet, son détenteur perçoit une valeur nette qui est égale à la valeur actuelle diminuée des frais bancaires ; ceci se passe, donc comme si le taux d'escompte était majoré.

Le taux d'escompte réel est ainsi égal à :

$$\mathbf{t_r} = \frac{\mathbf{36\ 000 \times Agios}}{\mathbf{V\ n}} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Exemple 2.7. : calcul du taux réel d'escompte.
Un effet escompté à 9 %, le 20 février a pour échéance le 25 avril. Quel est son taux réel d'escompte si sa valeur nominale est 10 345,00 DH et la commission d'encaissement est 10,00 DH soumise à une TVA de 7 % ?

Calculons, d'abord le nombre de jours entre le 20/02 et le 25/04, soit n = 8 + 31 + 25 = 64 jours, ensuite calculons l'escompte.

Formalisons le problème posé

Calculer t_r si V = 10 345 DH, t = 9 %, Agios = 10 DH avec TVA = 7 % et n = 64 jours.

$$E = \frac{10\ 345 \times 9 \times 64}{36\ 000} = 165{,}52 \text{ DH}$$

Agios = 165,52 + 10 x 1,07 = 176,22 DH

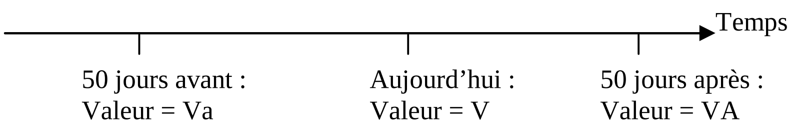
$$t_r = \frac{36\ 000 \times 176{,}22}{10345 \times 64} = 9{,}58\ \%$$

2.6. EVALUATION D'UN CAPITAL EN FONCTION DU TEMPS.

Un capital, comme un effet, a une valeur qui dépend de la date à laquelle on le considère. Ainsi, si le taux d'intérêt est 9 % un capital (ou un effet) qui vaut, aujourd'hui 10 000 DH

Vaudra sa valeur acquise VA, dans 50 jours, avec :
VA = C + I = 10 125 DH ;

Et vaut sa valeur actuelle Va, il y a 50 jours, avec :
Va = C – E = 9 875 DH.



Exemple 2.8. : Calcul des valeurs d'un capital en fonction du temps.

Quelle est la valeur d'un capital de valeur 12 350 DH, aujourd'hui, 30 jours avant et 54 jours après, si le taux d'intérêt est 10 % ?

30 jours avant,

$$\text{Va} = 12\ 350 - \frac{12\ 350 \times 10 \times 30}{36\ 000} = 12\ 247{,}08 \text{ DH}$$

54 jours après,

$$\text{VA} = 12\ 350 + \frac{12\ 350 \times 10 \times 54}{36\ 000} = 12\ 535{,}25 \text{ DH}$$

2.7. EQUIVALENCE DE DEUX EFFETS.

Deux effets sont équivalents, à une certaine date, s'ils sont égaux à cette date.

L'équivalence des effets est une opération importante qui permet de remplacer un ou plusieurs effets par un ou plusieurs autres effets.

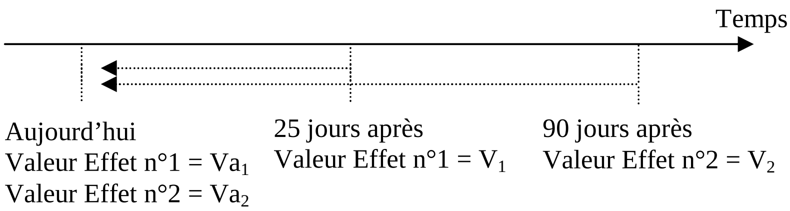
Exemple 2.9. : Equivalence de deux effets.

Prenons deux effets, escomptés à un taux de 12 %, avec les données suivantes :

1er effet : valeur nominale V_1 = 8 400 DH et délai d'échéance 25 jours ;

2ème effet : valeur nominale V_2 = 8 587,63 DH et délai d'échéance 90 jours.

Nous pouvons schématiser cela sur un axe des temps :



La valeur actuelle du 1er effet est, aujourd'hui, égale à :

$$Va_1 = V_1 - \frac{V_1 \times t \times 25}{36\,000}$$

$$= 8\,400 - \frac{8\,400 \times 12 \times 25}{36\,000} = 8\,330{,}00 \text{ DH}$$

La valeur actuelle du 2ème effet est, aujourd'hui, égale :

$$Va_2 = V_2 - \frac{V_2 \times t \times 60}{36\,000}$$

$$= 8\,587{,}63 - \frac{8\,587{,}63 \times 12 \times 90}{36\,000} = 8\,330{,}00 \text{ DH}$$

On voit ainsi, qu'à la date d'aujourd'hui, les valeurs actuelles des deux effets sont égales et que donc les deux effets sont équivalents, ils peuvent être alors échangés.

En fait, le problème de l'équivalence de deux effets peut être posé de deux façons :

1er cas : On se place à la date d'aujourd'hui, on dispose de deux effets de valeurs nominales V_1 et V_2 et de délais d'échéances respectifs n_1 et n_2 jours. Quelle est la date d'équivalence de ces deux effets si le taux d'escompte annuel commun est t ?

En reprenant ce que nous avons déjà fait dans l'exemple 2.9, nous pouvons écrire, les égalités suivantes, si n est le délai au bout duquel la date d'équivalence intervient :

$$Va_1 = V_1 - \frac{V_1 \times t \times (n_1 - n)}{36\,000}$$

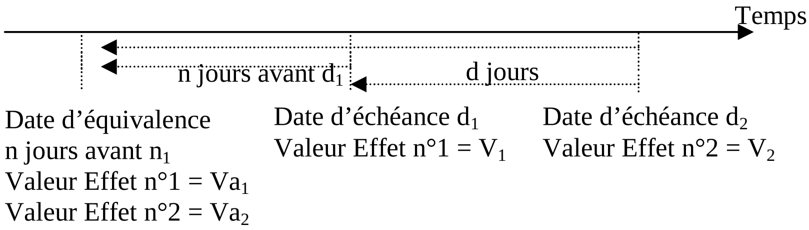
$$Va_2 = V_2 - \frac{V_2 \times t \times (n_2 - n)}{36\,000}$$

De l'égalité $Va_1 = Va_2$, nous pouvons tirer n :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V_1\,n_1 - V_2\,n_2}}{\mathbf{V_1 - V_2}} - \frac{\mathbf{36\,000}}{\mathbf{t}} \qquad \mathbf{(2.9)}$$

2ème cas : On dispose de deux effets de valeurs nominales V_1 et V_2 et de dates d'échéances respectives d_1 et d_2 jours. Quelle est la date d'équivalence de ces deux effets si le taux d'escompte annuel commun est t ? (on suppose d_2 postérieure à d_1 et qu'il y ait d jours entre d_1 et d_2).

La différence entre les deux cas est que dans le 2ème on ne fait plus référence à la date d'aujourd'hui.



Ce cas peut être ramené au cas précédent, il suffit de considérer la date d'aujourd'hui comme date de départ des décomptes en jours des délais d'échéance des deux effets ; n sera alors le nombre de jours, à partir d'aujourd'hui, pour que la date d'équivalence intervienne et $(d_1 - n)$ le nombre de jours avant la date d'échéance du 1er effet pour que la date d'équivalence des deux effets intervienne.

L'intérêt de la formule (2.9) est qu'elle présente une symétrie entre les données relatives aux deux effets et par conséquent elle est facile à retenir.

Cette formule montre aussi que la date d'équivalence de deux effets existe et est unique.

Exemple 2.10. : Détermination de la date d'équivalence de deux effets.

On considère deux effets qui, escomptés le 2 février, ont des valeurs nominales égales à 3 771,74 DH et à 3 871,74 DH ; et des dates d'échéance respectivement le 30/03 et le 30/06 de la même année. Quelle est leur date d'équivalence, si le taux d'escompte est égal à 10 % ?

Calculons, tout d'abord, les nombres de jours entre le 02/02 et le 30/03 puis le 30/06 de la même année.

Entre le 2/2 et le 28/2, il y a 26 jours ;
Du 1er/3 au 30/3, il y a 30 jours ;
Du 30/3 au 30/4, il y a 31 jours ;
Du 1er/5 au 31/5, il y a 31 jours ;
Du 1er/- au 30/6, il y a 30 jours ;
Ainsi n_1 = 56 jours et n_2 = 148 jours.

Formalisons, maintenant le problème posé.
Calculer la date d'équivalence de deux effets si :
V_1 = 3 771,74 DH, V_2 = 3 871,74 DH, n_1 = 56 jours et n_2 = 148 jours et t = 10 %.

L'application de la formule (2.9) donne :

$$n = \frac{3\,771{,}74 \times 56 - 3\,871{,}74 \times 148}{3\,771{,}74 - 3\,871{,}74} - \frac{36\,000}{10} = 18 \text{ jours}$$

La date d'équivalence aura lieu 18 jours après la date de négociation, à savoir le 20 février.

Exemple 2.11. : Détermination de la date d'équivalence de deux effets.

Reprenons l'exemple précédent et ne définissons pas la date de négociation des deux effets.

L'énoncé devient alors :

Deux effets de valeurs nominales 3 771,74 DH ont pour dates d'échéances respectives le 30/03 et le 30/06 de la même année. Quelle est leur date d'équivalence si le taux d'escompte et égale à 10 % ?

Formalisons le problème posé :

Calculer n date d'équivalence de deux effets si :

V_1 = 3 771,74 DH, V_2 = 3 871,74 DH, d1 = le 30/03, d2 = le 30/06 et t = 10 %.

Le nombre de jours entre le 30/03 et le 26/10 est d = 92 jours donc $n_2 = n_1 + 92$.

La relation (2.9) devient

$$n = \frac{V_1\ n_1 - V_2\ (n_1 + d)}{V_1 - V_2} - \frac{36\ 000}{t}$$

$$n_1 - n = \frac{36\ 000}{t} - \frac{V_2}{V_2 - V_1}\, d = 38 \text{ jours}$$

Ce qui veut dire que la date d'équivalence a lieu 38 jours avant la date d'échéance du 1er effet, soit 38 jours avant le 30/03, soit le 20/02.

On retrouve bien le même résultat que pour l'exemple 2.10.

La relation (2.9) permet de calculer une des six variables V_1, V_2, n_1, n_2, t et n si l'on connaît les cinq autres. En effet :

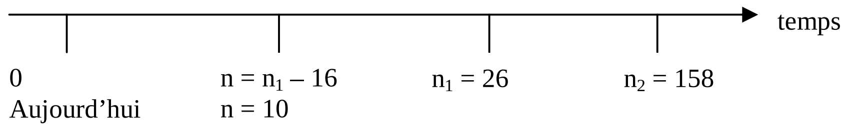
Exemple 2.12. : Calcul du taux d'escompte de deux effets équivalents.

Trouver le taux d'escompte de deux effets qui ont des valeurs nominales de 21 712,12 et 22 712,12 DH, des échéances respectives de 26 et 158 jours et qui sont équivalents 10 jours avant la date d'échéance du 1^e effet.

Formalisons le problème posé.

Trouver t si V_1 = 21 712,12 DH, V_2 = 22 712,12 DH, n_1 = 26 jours et n_2 = 158 jours ; avec date d'équivalence 10 jours avant la date d'échéance du 1er effet.

Nous sommes, ici dans le 1er cas, à savoir, $n = n_1 - 10 = 16$ jours, de ce fait nous pouvons porter les dates d'échéance sur un axe du temps.



La relation (2.9) donne :

$$\frac{36\,000}{t} = \frac{V_1 n_1 - V_2 n_2}{V_1 - V_2} - n = 3\,008 \quad \text{soit} \quad t = 11{,}97\ \%$$

2.8. GENERALISATION D'EQUIVALENCE D'EFFETS.

Considérons un 1er groupe d'effets V_1, V_2, V_3, ….V_k, d'échéances respectives n_1, n_2, n_3 …. n_k ;

Considérons un 2ème groupe d'effets W_1, W_2, W_3, ….W_l, d'échéances respectives m_1, m_2, m_3 …. m_l ;

La date d'équivalence de ces deux groupes d'effets est celle pour laquelle on a l'égalité des valeurs actuelles des deux groupes d'effets, c'est-à-dire, la date à laquelle les deux ensembles d'effets peuvent s'échanger :

Par définition, nous pouvons écrire à la date d'équivalence :

$$\sum_{i=1}^{i=k} \left[V_i - \frac{V_i \, t\,(n_i - n)}{36\,000} \right] = \sum_{i=1}^{i=l} \left[W_i - \frac{W_i \, t\,(m_i - n)}{36\,000} \right]$$

Cette relation qui traduit la définition de l'équivalence des deux groupes d'effets aboutit à la généralisation de la formule (2.9) de la date d'équivalence :

$$\mathbf{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=l} W_i\, m_i - \sum_{i=1}^{i=k} V_i\, n_i}{\sum_{i=1}^{i=l} W_i - \sum_{i=1}^{i=k} V_i} - \frac{36\,000}{t} \qquad \mathbf{(2.10)}$$

Cette formule montre aussi que la date d'équivalence de deux groupes d'effets existe et est unique.

Exemple 2.13. : calcul de la date d'équivalence de deux groupes d'effets.

Prenons un 1er groupe de trois effets de valeurs nominales 5 000 DH, 7 500 DH et 9 250 DH et d'échéances respectives 75, 70 et 90 jours.

Prenons un 2ème groupe de deux effets de valeurs nominales 10 100 DH, et 8 250 DH et d'échéances respectives 13 et 25 jours.

Trouver leur date d'équivalence si le taux d'escompte est égal à 10,50 %.

Formalisons le problème posé.

Trouver n, date d'équivalence de deux groupes d'effets, si :

1er groupe d'effets : V_1 = 5 000 DH, n_1 = 75 jours, V_2 = 7 500 DH, n_2 = 70 jours, V_3 = 9 250 DH et n_3 = 90 jours.

2ème groupe d'effets : W_1 = 15 100 DH, W_2 = 6 250 DH, et m_1 = 13 jours et m_2 = 25 jours.

Taux d'escompte annuel t = 10,50 %

Nous sommes, ici, dans le 1er cas du paragraphe 2.7, l'application de la formule (2.9) donne :

$$n = \frac{(V_1 n_1 + V_2 n_2 + V_3 n_3) - (W_1 m_1 + W_2 m_2)}{(V_1 + V_2 + V_3) - (W_1 + W_2)} - \frac{36\,000}{t}$$

$$n = \frac{5\,000 \times 75 + 7\,500 \times 70 + 9\,250 \times 90 - 15\,100 \times 13 + 6\,250 \times 25}{5\,000 + 7\,500 + 9\,250 - 15\,100 - 6\,250}$$

$$- \frac{36\,000}{t} = (21{,}3) \text{ soit } 22 \text{ jours}$$

Nous avons arrondi le résultat au nombre entier juste supérieur du fait qu'il s'agit d'un nombre de jours qui doit être entier.

Ainsi, la date d'équivalence des deux groupes d'effets se situe à 22 jours ou à (22 – 13 = 9) 9 jours après la date d'échéance du 1er effet du 2ème groupe d'effets.

2.9. ECHEANCE COMMUNE DE PLUSIEURS EFFETS.

On parle d'échéance commune de plusieurs effets, lorsqu'il s'agit de remplacer un groupe d'effets par un seul effet de valeur nominale W et de date déchéance m et qui est équivalent, à la date d'aujourd'hui, à l'ensemble des autres effets.

C'est là un cas particulier du problème précédent ou le 2ème groupe d'effet est ramené à un seul effet de valeur nominal W et de date d'échéance m, avec aujourd'hui comme date d'équivalence du 1er groupe d'effets et de l'effet W.

Prenons, d'abord le cas de deux effets de valeurs nominales V_1 et V_2 et de délais d'échéance respectifs n_1 et n_2 ; il s'agit de trouver la valeur nominale de l'effet de valeur nominale W et de délai d'échéance m qui est équivalent, à la date d'aujourd'hui, aux deux effets.

L'effet W est équivalent aux effets V_1 et V_2, à la date d'aujourd'hui :

$$(V_1 - \frac{V_1\, t\, n_1}{36\,000}) + (V_2 - \frac{V_2\, t\, n_2}{36\,000}) = W - \frac{W\, t\, m}{36\,000}$$

Ce qui donne pour W et m les expressions suivantes :

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{(36\,000 - t\, n_1)\, V_1 + (36\,000 - t\, n_2)\, V_2}}{\mathbf{36\,000 - t\, m}} \quad \mathbf{(2.11)}$$

$$\mathbf{m = \frac{36\ 000}{t} - \frac{(\ 36\ 000 - t\ n_1)\ V_1\ + (\ 36\ 000 - t\ n_2)\ V_2}{W}} \quad \mathbf{(2.12)}$$

Ces expressions permettent de calculer la valeur nominale, W (ou la date d'échéance, m) de l'effet qui remplace, à la date d'aujourd'hui, les deux autres effets.

Exemple 2.14. : Calcul de la valeur nominale d'un effet équivalent à deux effets.

Trouver la valeur nominale d'un effet d'échéance 50 jours équivalent aux deux effets de valeurs respectives 10 500 et 9 200 DH et d'échéances respectives 25 et 35 jours. Le taux d'escompte est de 10 %

Formalisons le problème posé.
Trouver W, si m = 50 jours t = 10 % et
V_1 10 500 DH et n_1 = 25 jours
V_2 = 9 200 DH et n_2 = 35 jours
L'utilisation de la relation (2.11) donne :

$$W = \frac{(\ 36\ 000 - 10 \times 25\ )\ 10\ 500 + (\ 36\ 000 - 10 \times 35\ )\ 9\ 200}{36\ 000 - 10 \times 50}$$

$$= 19\ 812{,}82 \text{ DH}$$

Exemple 2.15. : Calcul de l'échéance commune de deux effets.

Calculer l'échéance commune des deux effets de l'exemple 2.14, s'ils sont remplacés par un effet de valeur nominale 20 000 DH.

Formalisons le problème posé.
Trouver m, si W = 20 000 DH t = 10 % et
V_1 10 500 DH et n_1 = 25 jours
V_2 = 9 200 DH et n_2 = 35 jours

L'utilisation de la relation (2.12) donne :

$$m = \frac{36\,000}{t} - \frac{(36\,000 - 10 \times 25)\,10\,500 + (36\,000 - 10 \times 35)\,9\,200}{20\,000 \times 10}$$
$$= 84 \text{ jours}$$

Nous avons arrondi le résultat au nombre entier juste supérieur du fait qu'il s'agit d'un nombre de jours qui doit être entier.

Généralisation des relations (2.11) et (2.12) :

Dans le cas général, on a un 1er groupe d'effets V_1, V_2, V_3, ….V_k, d'échéances respectives n_1, n_2, n_3 …. n_k et l'on essaie de le remplacer, aujourd'hui, par un seul effet de valeur nominale W et de date d'échéance m. ;

Les relations (2.11) et (2.12) se généralisent et deviennent :

$$\mathbf{W} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} (36\,000 - t\, n_i)\, V_i}{36\,000 - t\, m} \qquad \mathbf{(2.13)}$$

$$\mathbf{m} = \frac{36\,000}{t} - \frac{\sum_{i=1}^{i=k} (36\,000 - t\, n_i)\, V_i}{W} \qquad \mathbf{(2.14)}$$

2.10. ECHEANCE MOYENNE DE PLUSIEURS EFFETS.

On parle d'échéance moyenne de plusieurs effets, lorsqu'il s'agit de remplacer un groupe d'effets par un seul effet de valeur nominale W, égale à la somme des valeurs nominales des autres effets et de date d'échéance m et qui est équivalent, à la date d'aujourd'hui, à l'ensemble des autres effets.

C'est là un cas particulier du problème précédent ou l'effet équivalent est de valeur nominale W et de date d'échéance m, avec les conditions suivantes :

$$W = \sum_{i=1}^{i=k} V_i \quad \text{et m date d'échéance de l'effet W.}$$

En reprenant la relation de définition d'équivalence d'effets, on trouve la formule généralisée de l'échéance moyenne de plusieurs effets.

$$\sum_{i=1}^{i=k} \left[V_i - \frac{V_i\, t\, n_i}{36\,000} \right] = W - \frac{W\, t\, m}{36\,000}$$

D'où l'on déduit m :

$$\mathbf{m} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} V_i\, n_i}{\sum_{i=1}^{i=k} V_i} \qquad \textbf{(2.15)}$$

L'échéance moyenne de plusieurs effets ne dépend pas du taux d'escompte.

Exemple 2.16. : Calcul de l'échéance moyenne d'un groupe de trois effets.

Déterminer l'échéance moyenne d'un groupe de trois effets de valeurs nominales respectives 9 500, 8 700 et 9 200 DH et d'échéances respectives 20, 25 et 40 jours.

Formalisons le problème posé.

Trouver m, échéance moyenne, d'un groupe de trois effets,

V_1 9 500 DH et n_1 = 20 jours

V_2 = 8 700 DH et n_2 = 25 jours

V_3 = 9 200 DH et n_3 = 40 jours

L'utilisation de la relation (2.15) donne :

$$m = \frac{9\,500 \times 20 + 8\,700 \times 25 + 9\,200 \times 40}{9\,500 + 8\,700 + 9\,200} = 29 \text{ jours}$$

Nous avons arrondi le résultat au nombre entier juste supérieur du fait qu'il s'agit d'un nombre de jour qui doit être entier.

2.11. COMPTES D'INTERETS.

Nous reprenons les calculs concernant les comptes d'intérêts pour voir comment intervient l'escompte sur leur tenue.

Nous limiterons notre propos à l'étude de deux exemples.

Exemple 2.17. : Arrêté d'un compte bancaire.

M. CHIBOUB dispose d'un compte bancaire auprès de la B.M.C.E., il effectue les opérations suivantes :

Dates	***Opérations***	
	Intitulés	***Montants DH***
31/10	*Solde du compte*	*12 350,50*
05/11	*Retrait d'un chèque*	*15 500,00*
10/11	*Retrait d'un chèque*	*7 750,00*
21/11	*Remise d'un effet au 21/12*	*9 000,00*
25/11	*Remise d'un effet au 31/12*	*5 000,00*
25/11	*Retrait d'un chèque*	*11 250,00*

Etablir l'arrêté du compte au 30/11, sachant que :

Le taux des intérêts débiteurs et celui de l'escompte sont égaux à 10 %

- Conformément à la loi bancaire, il n'y a pas d'intérêts créditeurs.

- La date de valeur d'un retrait par un chèque est j - 1

La formalisation du problème est faite dans l'énoncé.

Pour les calculs de l'escompte des deux effets remis, nous avons compté les nombres de jours séparant la date de remise de chaque effet de sa date d'échéance, comme indiqué, tout au long de ce chapitre.

Pour le 1er effet, nous avons trouvé $n_1 = 30$ jours ;

Pour le 2ème effet, nous avons trouvé $n_2 = 36$ jours.

Le tableau récapitulatif des calculs pour l'arrêté du compte bancaire de M. CHIBOUB est donné à la page 53.

Exemple 2.18. : Etude de cas : Arrêté d'un compte bancaire.

Mme ZINEB a un compte chèque auprès de la Banque Populaire. Elle effectue les opérations suivantes :

Dates	*Intitulés*	*Montants DH*
31/01	*Solde*	*12 325,36*
05/02	*Remise d'effet au 26/03*	*9 685,30*
07/02	*Remise chèque hors place*	*2 350,00*
12/02	*Versement espèces*	*10 000,00*
20/02	*Retrait chèque*	*42 250,00*
25/02	*Remise chèque sur place*	*25 750,00*
26/02	*Remise d'effet au 18/04*	*3 256,37*
27/02	*Retrait espèces*	*2 250,00*

Etablir l'arrêté du compte de Mme ZINEB, au 28/02 sachant que :

La date de valeur d'un versement pour un chèque sur place est de j + 3 et pour un chèque hors place est de j + 15.

Le taux d'intérêts débiteurs et le taux d'escompte sont égaux à 11 %.

La formalisation du problème est faite dans l'énoncé.

Le tableau récapitulatif des calculs pour l'arrêté du compte bancaire de Mme ZINEB est donné à la page 54.

Après cette 1ère partie consacrée aux mathématiques financières à court terme, nous abordons, dans les prochains chapitres, la partie consacrée aux mathématiques financières à moyen et long termes.

Tableau d'arrêté du compte bancaire de M. CHIBOUB, au 30/11.

Date opération	Opérations		Dates Valeur	Nombre de jours	Solde		Intérêts	Escompte
	Intitulés	Montants DH			Débit	Crédit		
31/10	Solde	12 350,00	31/10	04		12 350,00		
05/11	Retrait d'un chèque	15 500,00	04/11	05	3 150,00		4,38	
10/11	Retrait d'un chèque	7 750,00	09/11	13	10 900,00		39,36	
21/11	Remise d'un effet au 21/12	9 000,00	22/11	02	1 900,00		1,06	75,00
25/11	Retrait d'un chèque	11 250,00	24/11	02	13 150,00		7,31	
25/11	Remise d'un effet au 31/12	5 000,00	26/11	02	8 150,00		4,53	50,00
30/11	Total intérêts et escomptes	181,64			8 331,64		56,64	125,00

Dans ce cas, on a commencé, pour la clarté des calculs, par classer les opérations selon leur date de valeur. Cette opération est très importante.

On n'a considéré que les intérêts débiteurs du fait de la loi bancaire qui interdit les intérêts pour les comptes bancaires créditeurs.

Pour le calcul des intérêts débiteurs et des escomptes, nous avons utilisé, respectivement, la relation (1.4) et la relation (2.3), par exemple pour le cas des intérêts dûs pour le solde débiteur de 1 900,00 DH, pendant 2 jours, nous avons :

$$I = \frac{C\ t\ n}{36\ 000} = \frac{1\ 900 \times 10 \times 2}{36\ 000} = 1{,}06\ \text{DH}$$

Et pour le cas de l'escompte dû pour la remise de l'effet de 9 000,00 DH qui a une échéance à 30 jours, nous avons :

$$E = \frac{V\ t\ n}{36\ 000} = \frac{9\ 000 \times 10 \times 30}{36\ 000} = 75{,}00\ \text{DH}$$

Le total des intérêts et des escomptes sont arrêtés le 30/11 pour être reportés sur le solde.

Le solde bancaire, au 30/11, du compte de M. CHIBOUB, est donc de 8 331,64 DH.

Tableau d'arrêté du compte bancaire de Mme ZINEB, au 28/02.

Date Opération	Opérations		Date de valeur	Nombre de jours	Solde		Intérêts	Escomptes
	Intitulés	Montants DH			Débit	Crédit		
31/01	Solde	12 325,36	31/01	06		12 325,36		
05/02	Remise effet au 26/03	9 635,30	06/02	07		21 960,66		131,47
12/02	Versement espèces	10 000,00	13/02	06		31 960,66		
20/02	Retrait chèque	42 250,00	19/02	03	10 289,34		8,57	
07/02	Remise chèque hors place	2 350,00	22/02	02	12 639,34		7,02	
25/02	Retrait espèce	2 250,00	24/02	04	14 889,34		16,54	
26/02	Remise effet au 18/04	3 256,37	27/02	01	11 632,97		3,23	46,13
25/02	Remise chèque sur place	25 750,00	28/02	0		14 117,03	35,36	177,60
28/02	Total intérêts et escomptes	212,96				13 904,07		

Dans ce cas, on a commencé, pour la clarté des calculs, par classer les opérations selon leur date de valeur. Cette opération est très importante.

On n'a considéré que les intérêts débiteurs du fait de la loi bancaire qui interdit les intérêts pour les comptes bancaires créditeurs.

Pour le calcul des intérêts débiteurs et des escomptes, nous avons utilisé, respectivement, la relation (1.4) et la relation (2.3) ; pour le cas des intérêts dûs pour le solde débiteur de 10 289,34 DH, pendant 3 jours, nous avons :

$$I = \frac{C\ t\ n}{36\ 000} = \frac{10\ 289{,}34 \times 10 \times 3}{36\ 000} = 8{,}57\ \text{DH}$$

Et pour le cas de l'escompte dû pour la remise de l'effet de 9 635,30 DH qui a une échéance à 49 jours, nous avons :

$$E = \frac{V\ t\ n}{36\ 000} = \frac{9\ 635{,}30 \times 10 \times 49}{36\ 000} = 131{,}47\ \text{DH}$$

Le total des intérêts et des escomptes sont arrêtés le 28/02 pour être reportés sur le solde.

Le solde bancaire, au 28/02, du compte de Mme ZINEB, est donc créditeur de 13 904,07 DH.

PARTIE 2 - MATHEMATIQUES FINANCIERES A MOYEN ET LONG TERMES.

Cette partie s'intéresse aux cas des capitaux engagés pour le moyen et long termes, à savoir, plusieurs mois, quelques années ou même plus.

CHAPITRE 3 - INTERETS COMPOSES.

3.1. DEFINITION.

Lorsqu'un capital est placé pour plusieurs années, l'intérêt qu'il produit, chaque année, est réintégré au capital principal et produit, à son tour, un intérêt. Cette capitalisation des intérêts est la base des calculs des intérêts composés.

On considère un capital de 1 000 DH placé au taux annuel de 10 %, calculons ce qu'il devient après 3 années.

A la fin de la $1^{ère}$ année, il devient :1 000 (1 + 0,1) = 1 100
A la fin de la $2^{ème}$ année, il devient :1 100 (1 + 0,1) = 1 210
A la fin de la $3^{ème}$ année, il devient :1 210 (1 + 0,1) = 1 331

Il acquiert, ainsi un intérêt égal à 1 331 – 1 000 = 331 DH.

Placé à intérêt simple de 10 %, il n'aurait acquis que 300 DH d'intérêts.

La différence vient de la capitalisation des intérêts, des intérêts qui produisent des intérêts, d'où le nom d'intérêts composés.

Reprenons l'exemple ci-dessus, et généralisons-le au cas d un capital C placé, pour n périodes, au taux périodique t :

Après 1 période le capital devient : $C + C\,t = C\,(1 + t)$

Après 2 périodes il devient :
$C\,(1 + t) + C\,(1 + t)\,t = C\,(1 + t)^2$

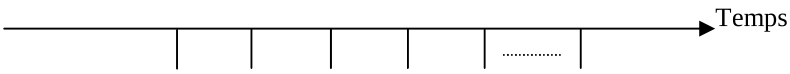
Après 3 périodes il devient :
$C\,(1 + t)^2 + C\,(1 + t)^2\,t = C\,(1 + t)^3$

Après 4 périodes il devient :
$C\,(1 + t)^3 + C\,(1 + t)^3\,t = C\,(1 + t)^4$

Et ainsi de suite, après n périodes il devient : $C\,(1 + t)^n$

3.2. VALEUR ACQUISE D'UN CAPITAL.

Nous pouvons représenter les valeurs d'un capital, aujourd'hui et quelque temps après, sur un axe du temps :



Aujourd'hui :
Valeur C

Après n périodes :
Valeur VA = C_n

3.2.1. FORMULE DE LA VALEUR ACQUISE.

La valeur acquise, notée VA, d'un capital C, placé, pendant n périodes, au taux d'intérêt périodique t est donné par la formule générale :

$$\mathbf{VA = C_n = C\ (1 + t)^n} \qquad \mathbf{(3.1)}$$

Il n'est pas nécessaire de parler toujours d'années pour le calcul de la valeur acquise avec des intérêts composés, il suffit, comme nous venons de le faire, de parler de périodes.

En effet, si le taux d'intérêt t concerne une période donnée (année, mois, trimestre, semestre, etc.) la valeur acquise par un capital placé pendant n périodes, au taux périodique, t est donnée par la relation (3.1).

Ainsi, la somme totale des intérêts produits par un capital placé, pendant n périodes, au taux d'intérêt périodique t est :

$$\mathbf{I = C\ (1 + t)^n - C = C\ [(1 + t)^n - 1]} \qquad \mathbf{(3.2)}$$

3.2.2. CALCULS SUR LA FORMULE DE LA VALEUR ACQUISE.

La relation (3.1) permet de calculer une des 4 variables, VA, C, t et n dès que les 3 autres sont connues.

Nous allons, dans ce paragraphe, donner tous les cas de figures possibles.

Exemple 3.1. : Calcul de la valeur acquise d'un capital placé à intérêts composés.

Calculer la valeur acquise d'un capital de 5 500 DH, placé pendant 5 ans au taux annuel de 9 %.

Formalisons le problème posé.

Calculer VA si C = 5 500 DH, t = 9 % et n = 5 ans.

$$VA = C\,(1 + t)^n = 5\,500\,(1{,}09)^5 = 8\,462{,}43 \text{ DH}$$

Exemple 3.2. : Calcul de la valeur initiale d'un capital, placé à intérêts composés.

Calculer le montant du capital qui, placé, pendant 3 ans, au taux annuel de 11 %, acquiert une valeur égale à 7 500 DH.

Formalisons le problème posé.

Calculer C si VA = 7 500 DH, t = 11 % et n = 3 ans.

$$C = \frac{VA}{(1 + t)^n} = \frac{7\,500}{(1{,}11)^3} = 4\,940{,}48 \text{ DH}$$

Les calculs, pour ces deux premiers exemples, peuvent être faits facilement sur simple calculette ; ils peuvent aussi utiliser les tables financières T1a et T2a.

Exemple 3.3. : Calcul du taux d'intérêts composés.

Quel est le taux d'intérêt d'un capital de 10 500 DH qui, placé, pendant 5 ans, acquiert une valeur de 17 298,19 DH ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si C = 10 500, VA = 17 298,19 DH, et n = 5 ans.

Solution algébrique :
De la relation (3.1) on peut tirer :

$$t = \left(\frac{VA}{C}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 10{,}50\ \%$$

Solution d'après les tables financières :
On peut utiliser les tables financières.

$$(1 + t)^5 = \frac{17\ 298{,}19}{10\ 500} = 1{,}64745$$

La table T1a donne pour n = 5 et Cn = 1,64745   t = 10,50 %

Exemple 3.4. : Calcul de la durée de placement, à intérêts composés, d'un capital.

Au bout de combien d'années un capital de 500 DH placé au taux annuel de 8,50 % acquiert-il une valeur de 751,83 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si C = 500 DH, VA = 751,83 DH et t = 8,50 %.

Solution algébrique :
La solution algébrique fait appel aux logarithmes (voir chapitre 7)

$VA = C\,(1 + t)^{n} \Rightarrow n \operatorname{Log}(1 + t) = \operatorname{Log}(VA/C)$

$$n = \frac{\operatorname{Log}\left({}^{VA}\!/_{C} \right)}{\operatorname{Log}(1 + t)} = \frac{\operatorname{Log}(1{,}50366)}{\operatorname{Log}(1{,}085)} = 5$$

Solution d'après les tables financières :
On peut utiliser la table financière T1a, avec les conditions :

$$(1 + 8{,}50\ \%)^n = \frac{751{,}83}{500{,}00} = 1{,}50366$$

La table T1a donne n = 5, pour t = 8,5 % et Cn = 1,50366.

Remarque 1 : Dans les exemples 3.1, 3.2, 3.3, et 3.4 nous avons, sciemment arrangé nos données pour trouver des résultats exacts. L'objectif essentiel recherché, dans ces cas, est uniquement un entraînement à l'utilisation de la relation (3.1).

Nous donnerons plus loin, d'autres exemples avec des calculs qui ne tombent pas exacts et nous montrerons comment utiliser, dans ces cas, les tables financières, avec la méthode d'interpolation.

3.3. VALEUR ACTUELLE D'UN CAPITAL.

Nous pouvons représenter les valeurs d'un capital, aujourd'hui et quelque temps avant, sur un axe du temps :

Les relations (3.1) donnent la valeur acquise d'un capital placé, pendant n périodes, au taux périodique t.

La valeur actuelle de ce capital est C, elle se déduit de la valeur acquise par la relation :

$$\mathbf{C = \frac{VA}{(1+t)^{n}} = VA\,(1+t)^{-n} = C_n\,(1+t)^{-n}} \qquad \mathbf{(3.3)}$$

Les calculs sur la relation (3.2) ne diffèrent en rien de ceux que nous avons faits sur la relation (3.1).

3.4. TAUX D'INTERETS EQUIVALENTS.

La valeur acquise d'un capital C placé, pendant n années, au taux annuel t est :

$VA = Cn = C\,(1 + t)^n$

On peut aussi dire que ce même capital est placé pendant 12n mois ou 4n trimestres, aux taux mensuels t_m, ou taux trimestriel t_t. Nous pouvons donc écrire :

$VA = C\,(1 + t)^n = C\,(1 + t_m)^{12n} = C\,(1 + t_t)^{4n}$

On dit que les taux mensuels t_m et trimestriels t_t sont équivalents au taux annuel t. Les relations liant ces 3 taux sont :

$$\mathbf{(1 + t) = (1 + t_m)^{12} = (1 + t_t)^4} \qquad \mathbf{(3.4)}$$

La table financière T3, à la fin du livre, donne la correspondance entre ces trois différents taux.

Nous allons, dans ce qui suit, montrer comment utiliser ces différents taux, ainsi que la table financière T3.

Remarque 2 : Taux équivalents et taux proportionnels

Les relations (3.3) permettent de calculer le taux mensuel et taux trimestriel équivalents à partir du taux annuel.

Les taux équivalents sont basés sur le calcul des intérêts composés.

Les taux proportionnels mensuels et trimestriels sont basés sur le calcul des intérêts simples et donnés par les relations (3.4 bis).

$$\mathbf{t_m = \frac{t}{12} \qquad et \qquad t_t = \frac{t}{4} \qquad (3.4\ bis)}$$

Les taux proportionnels sont basés sur le calcul des intérêts simples et l'escompte simple.

Exemple 3.5. : Calcul de la valeur acquise d'un capital, placé à intérêts composés.
Un capital de 14 500 DH est placé à un taux annuel de 8,5 % pendant 2 ans et 7 mois. Quelle est sa valeur acquise ?

Formalisons le problème posé.
Calculer VA si C = 14 500,00 t = 8,50 % et T = 2 ans et 7 mois.

Solution algébrique :
Si t = 8,5 %, la table T3 donne pour taux mensuel équivalent : t_m = 0,682 %

VA = 14 500 x (1 + 8,50 %)^2 (1 + 0,682 %)^7
= 14 500 x 1,17723 x 1,04873 = 17 901,65 DH.

Solution d'après les tables financières :
Nous utilisons la méthode d'interpolation
La table T1a donne $(1 + 8{,}50\ \%)^2 = 1{,}17723$
La table T1b donne :

$$y_1 = (1 + 0{,}675\ \%)^7 = 1{,}04822$$
$$y_2 = (1 + 0{,}700\ \%)^7 = 1{,}05004$$

Ainsi pour $\Delta t = 0{,}025\ \%$ on a $\Delta y = 0{,}00182$, donc pour $\Delta t = (0{,}682 - 0{,}675)\ \% = 0{,}007\ \%$, on aura :

$$\Delta y = 0{,}00182 \times \frac{0{,}007}{0{,}025} = 0{,}00051$$

Ce qui fait $(1 + 0{,}682\ \%)^7 = 1{,}04822 + 0{,}00051 = 1{,}04873$

Donc VA = 14 500,00 x 1,17723 x 1,04873 = 17 901,65 DH

Ce résultat est conforme à celui trouvé par la méthode algébrique.

Exemple 3.6. : Calcul de la valeur d'un capital, placé à intérêts composés.
Quelle est la valeur d'un capital qui, placé à un taux annuel de 9,5 %, pendant 3 ans et 5 mois, acquiert une valeur de 12 525 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer C si VA = 12 525,00 DH, t = 9,50 % et T = 3 ans et 5 mois.

Solution algébrique :
Si t = 9,5 %, la table T3 donne pour taux mensuel équivalent : $t_m = 0{,}759\ \%$
$C = 12\,525 \times (1 + 9{,}50\ \%)^{-3}\ (1 + 0{,}759\ \%)^{-5}$
$= 12\,525 \times 0{,}76165 \times 0{,}96290 = 9\,185{,}75$ DH

Solution d'après les tables financières :
Nous utilisons la méthode d'interpolation
La table T2a donne $(1 + 9{,}50\ \%)^{-3} = 0{,}76165$
La table T2b donne :

$$y_1 = (1 + 0{,}750\ \%)^{-5} = 0{,}96333$$
$$y_2 = (1 + 0{,}775\ \%)^{-5} = 0{,}96213$$

Ainsi pour $\Delta\, t = 0{,}025\ \%$ on a $\Delta\, y = 0{,}0012$, donc pour $\Delta\, t = (0{,}759 - 0{,}750)\ \% = 0{,}009\ \%$, on aura :

$$y = 0{,}0012 \times \frac{0{,}009}{0{,}025} = 0{,}00043$$

Ce qui fait $(1 + 0{,}759\ \%)^{-5} = 0{,}96333 - 0{,}00043 = 0{,}9629$

Donc VA = 12 525 x 0,76165 x 0,9629 = 9 185,75 DH

Ce résultat est conforme à celui trouvé par la méthode algébrique.

Exemple 3.7. : Calcul de la durée de placement, à intérêts composés, d'un capital.

Un capital de 10 500 DH est placé à un taux annuel de 11,25 %, quelle est sa durée de placement pour qu'il acquière une valeur de 11 578,09 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si C = 10 500 DH, VA = 11 578,09 DH et t = 11,25%

Solution d'après les tables financières :
Nous utilisons la méthode d'interpolation linéaire.

Nous devons calculer n en mois, pour ce faire, nous devons, d'abord calculer le taux de placement mensuel équivalent au taux annuel de 11,25 %.

La table T3 donne pour t = 11,20 %, t_m = 0,889 %
Pour t = 11,30 %, t_m = 0,896 %
Ainsi pour $\Delta t = 0{,}10$ % on a $\Delta t_m = 0{,}007$ %
Donc pour $\Delta t = 0{,}05$ % on aura

$$\Delta t_m = 0{,}05 \times \frac{0{,}007}{0{,}10} = 0{,}0035\ \%$$

Soit : t_m = (0,889 + 0,0035) % = 0,8925 %

L'utilisation de la relation (3.1) donne :
$(1 + 0{,}008925)^n = 11\,578{,}09 / 10\,500{,}00 = 1{,}102675$
n log 1,008925 = log 1,102675

$$n = \frac{\log 1{,}102675}{1{,}008925} = 11 \text{ mois}$$

Exemple 3.8. : Calcul du taux d'intérêts composés de placement d'un capital.

Un capital de 11 550 DH est placé, pendant 1 an et 7 mois ; à quel taux d'intérêt annuel est-il placé s'il acquiert une valeur de 12 950 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si C = 11 550 DH, VA = 12 950 DH et n = 1 an et 7 mois = 19 mois.

Solution algébrique :
L'utilisation de la relation (3.1) donne :
$(1 + t_m)^{19} = 12\,950 / 11\,550 = 1{,}2121$
Soit $t_m = [1{,}2121]^{(1/19)} - 1 = 0{,}010175$, ce taux correspond, d'après la relation (3.3), à un taux annuel de 12,92 %.

Solution par les tables financières :

Nous utilisons la méthode d'interpolation linéaire.

L'utilisation de la table T1b donne pour n = 19 et $(1 + t)^{19}$ = 1,2121 :

$y = (1 + 0{,}01000)^{19} = 1{,}20811$

$y = (1 + 0{,}01025)^{19} = 1{,}21380$

Ainsi pour $\Delta\ t = 0{,}025\ \%$ on a $\Delta\ y = 0{,}00569$

Donc pour $\Delta\ y = 0{,}1{,}2121 - 1{,}20811 = 0{,}00399$ on aura

$$\Delta\ t = 0{,}025\ \% \times \frac{0{,}00399}{0{,}00569} = 0{,}0175\ \%$$

t= (0,01 + 0,000175) % = 1,0175 %, ce qui correspond, d'après la relation (3.3) à un taux annuel t = 12,92 %

Exemple 3.9. : Calcul du taux d'intérêts composés.

Quel est le taux d'intérêt d'un capital de 5 200 DH qui, placé, pendant 7 ans, acquiert une valeur de 9 600 DH ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si C = 5 200, VA = 9 600 DH, et n = 7 ans.

Solution algébrique :

De la relation (3.1) on peut tirer :

$$t = \left(\frac{VA}{C}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 = 9{,}153\ \%$$

Solution d'après les tables financières :

Nous utilisons la méthode d'interpolation linéaire.

On peut utiliser la table financière T1a avec les conditions suivantes :

$$(1 + t)^7 = \frac{VA}{C} = \frac{9\ 600}{5\ 200} = 1{,}84615 \text{ et n = 7}$$

La table T1a donne pour :

$t = 9{,}10\ \%$ et $n = 7$ $\quad y = (1 + t)^7 = 1{,}83981$

$t = 9{,}20\ \%$ et $n = 7$ $\quad y = (1 + t)^7 = 1{,}85165$

Ainsi pour $\Delta t = 0{,}10\ \%$ on a $\Delta y = 0{,}01184$

Or on cherche t pour $y = 1{,}84615$ c'est-à-dire pour $\Delta y = 0{,}00634 = 1{,}84615 - 1{,}83981$

Donc pour $\Delta y = 0{,}00634$ on a $\Delta t = 0{,}10 \text{ x } \dfrac{0{,}00634}{0{,}01184} =$ 0,0535 %

$t = (9{,}10 + 0{,}0535)\ \% = 9{,}154\ \%$

Exemple 3.10. : Taux équivalent et taux proportionnel.

Un capital de 100 000 DH est placé, pendant 7 mois à un taux de 9 % l'an.

Quelle est sa valeur acquise selon qu'on utilise le taux mensuel équivalent t_{me} ou le taux mensuel proportionnel t_{mp} ?

Formalisons le problème posé.

Calculer VA si C = 100 000 DH et t = 9 %.

Avec VA_1 si $t_m = t_{me}$

VA_2 si $t_m = t_{mp}$

Calculons d'abord les taux mensuels équivalents et proportionnels.

D'après la table T3 nous avons $T_{me} = 0{,}721\ \%$ pour t = 9 %.

D'après la relation (3.4 bis) nous avons $t_{mp} = 2{,}25$.

Le calcul des valeurs acquises se fait :

Pour t_{me}, selon la relation (3.1)

$VA_1 = C(1 + t_{me})^n = 100\,000\ (1{,}00721)^7 = 105\,157{,}49$ DH

Pour t_{mp}, selon la relation (1.1bis)

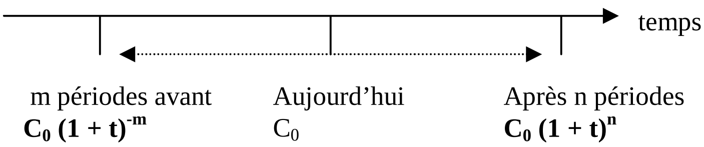
$$VA_2 = C\ (1 + \frac{t_{mp}.n}{100}) = 100\,000\ (1 + \frac{2{,}25 \text{ x } 7}{100}) = 115\,750 \text{ DH}$$

La différence entre taux équivalent et taux proportionnel, est que dans le 1er cas, on fait les calculs en tenant compte de la capitalisation des intérêts.

3.5. EVALUATION D'UN CAPITAL EN FONCTION DU TEMPS.

Un capital ayant, aujourd'hui, une valeur C_0, voit sa valeur varier avec le temps ; en effet, si le taux d'intérêt périodique est t :

Après n période, le capital vaut $C_0\,(1 + t)^n$
Après p périodes, supplémentaires, il vaut $C_0\,(1 + t)^{n+p}$
Et m périodes avant, il valait $C_0\,(1 + t)^{-m}$



3.5.1. ESCOMPTE A INTERETS COMPOSES.

On parle d'escompte à intérêts composés pour des effets à échéances lointaines, plus d'une année.

La valeur actuelle d'un effet de valeur nominale V et d'échéance n périodes est, si le taux d'escompte (ou d'intérêt) est t :

$$\mathbf{Va = V\,(1 + t)^{-n}} \qquad \mathbf{(3.5)}$$

De ce fait, l'escompte, à intérêts composés est donné par la relation :

$$\mathbf{E = V - Va = V\,[1 - (1 + t)^{-n}\,]} \qquad \mathbf{(3.6)}$$

3.5.2. EQUIVALENCE A INTERETS COMPOSES.

Prenons deux capitaux C_1 et C_2 (ou deux effets), de dates d'échéance respectives n_1 et n_2, et supposons qu'au taux d'intérêt t, ils soient équivalents. Nous pouvons donc écrire :

$$C_1\,(1 + t)^{n_1} = C_2\,(1 + t)^{n_2}$$

A une date quelconque p périodes après ou q périodes avant, nous aurons toujours :

p périodes après : $C_1\,(1 + t)^{n_1+p} = C_2\,(1 + t)^{n_2+p}$

q périodes avant : $C_1\,(1 + t)^{n_1-q} = C_2\,(1 + t)^{n_2-q}$

Ainsi, quelle que soit la date à laquelle on considère les deux capitaux C_1 et C_2, ils seront toujours équivalents.

Si deux capitaux (ou effets), escomptés à intérêts composés, sont équivalents, à une certaine date, ils le seront à n'importe quelle autre date, avant ou après cette date.

Exemple 3.11. : Calcul de l'escompte à intérêts composés.
Un effet de valeur nominale 12 350 DH et d'échéance 15 mois est escompté à un taux de 7,5 % ; quel est le montant de l'escompte ?

Formalisons le problème posé.
Calculer E si V = 12 350 DH, n = 15 mois et t = 7,5 %.

Calculons, d'abord le taux d'escompte mensuel équivalent au taux annuel de 7,50 %.

La table T3 donne t_m = 0,00604 % pour t = 7,50 %

L'utilisation de la relation (3.6) donne :

E = 12 350 x [(1 + 0,00604)^{15} – 1] = 1167,48 DH

Exemple 3.12. : Calcul de la durée de l'escompte à intérêts composés.

Un effet de valeur nominale 5 271,78,00 DH est escompté à 5 000 DH. Quelle est sa date d'échéance si le taux d'escompte est 9,50 % l'an ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si V = 5 271,78,00 DH, Va = 5 000,00 DH, et t = 9,5 %.

Solution algébrique :

Calculons, d'abord le taux d'escompte mensuel équivalent au taux annuel de 9,50 %.

La table T3 donne t_m = 0,759 % pour t = 9,50 %

La relation (3.5) donne :

$$(1 + 0{,}759\ \%)^n = \frac{V}{Va} = \frac{5\ 271{,}78}{5\ 000{,}00} = 1{,}05436$$

$$n = \frac{\text{Log}\ (1{,}05436)}{\text{Log}\ (1{,}00759)} = 7\text{mois}$$

Le résultat est arrondi au nombre juste supérieur du fait qu'il s'agit de nombre de jours qui doit être entier.

Exemple 3.13. : Calcul du taux d'escompte à intérêts composés.

Un effet de valeur nominale 12 001,43 DH est escompté à 11 256,37 DH ; quel est son taux d'escompte, à intérêts composés, si son échéance est de 10 mois.

Formalisons le problème posé.

Calculer t_m, taux d'escompte mensuel, si V = 12 001,43 DH, Va = 11 256,37 DH et n = 10 mois.

Solution d'après les tables financières :

Nous utilisons la méthode d'interpolation :

L'utilisation de la relation (3.5) donne :

$(1 + t_m)^{-10}$ = Va / V = 11 256,37 / 12 001,43 = 0,93792

La table T2b donne pour n = 10 et

pour t_m = 0,625 % on ay = $(1 + t_m)^{-10}$ = 0,93960

pour t_m = 0,650 % on ay = $(1 + t_m)^{-10}$ = 0,93726

Donc Δ t = 0,025 % on a Δ y = - 0,00234

Or on cherche y = 0,93792

Or, pour Δ y = 0,93792 – 0,93726 = 0,00066

Ce qui fait $t_m = -0{,}025 \times \dfrac{0{,}00066}{0{,}00234} = -0{,}007\ \%$

On trouve t_m = (0,650 – 0,004) % = 0,643 % qui correspond à un taux annuel de t = 8 %

Exemple 3.14. : Etude de cas : Calculs sur les intérêts composés.

Un capital de 36 000 DH est placé, pendant 25 mois au taux annuel de 10 %. Après cette période, il est replacé à un taux de 11,20 %, pendant 17 mois.

Quelle est la valeur acquise de ce capital ?

Quel est le taux moyen de placement, pendant ces 42 mois ?

Formalisons le problème posé.
Calculer VA_1 si C = 36 000 DH, t = 10 et n = 25.
Calculer VA_2 si C = VA_1, t = 11,20 et n = 17.
Calculer t_{moy}.

Solution d'après les tables financières :
L'utilisation de la table T3 donne :
- t_m = 0,797 % pour t = 10 %
- t_m = 0,889 % pour t = 11,20 %

$VA_1 = 36\,000\,(1 + 0{,}00797)^{25} = 43\,902{,}84$ DH
$VA_2 = 43\,902{,}84\,(1 + 0{,}00889)^{17} = 51\,031{,}40$ DH

Par définition, t_{moy} est donné par la relation :
$VA_2 = 36\,000\,(1 + t_{moy})^{42} = 51\,031{,}40$ DH

La table T1b donne :
$(1 + t_{moy})^{42} = 51\,031{,}40 / 36\,000 = 1{,}41754$.

Pour t_{moy} = 0,800 % $y = (1 + t_{moy})^{42} = 1{,}39747$
Pour t_{moy} = 0,825 % $y = (1 + t_{moy})^{42} = 1{,}41210$

Ce qui fait que pour Δt = 0,025 % on a Δy = 0,01463
Or on cherche y = 1,41754 soit Δy = 0,02007

$$t_{moy} = 0{,}8000\ \% + 0{,}025\% \times \frac{0{,}02007}{0{,}01463} = 0{,}834\ \%$$

Ce qui correspond à un taux annuel de 10,48 %, d'après la relation (3.4).

Après ce chapitre réservé aux calculs sur les intérêts composés, nous pouvons aborder, dans le prochain chapitre, les calculs sur les annuités.

CHAPITRE 4 - LES ANNUITES.

Le calcul sur les annuités est un préalable indispensable aux calculs sur les emprunts et les investissements qui feront l'objet de la partie 3 relative aux mathématiques financières approfondies.

4.1. DEFINITION.

Les annuités sont des versements périodiques de sommes d'argent pour :

- Soit constituer une épargne, un capital ;
- Soit rembourser un prêt ou amortir un investissement.

Les questions que l'on se pose au sujet des annuités sont de calculer :

- La valeur actuelle de l'ensemble d'une série annuités ;
- La valeur acquise, à une date quelconque, de l'ensemble des annuités.

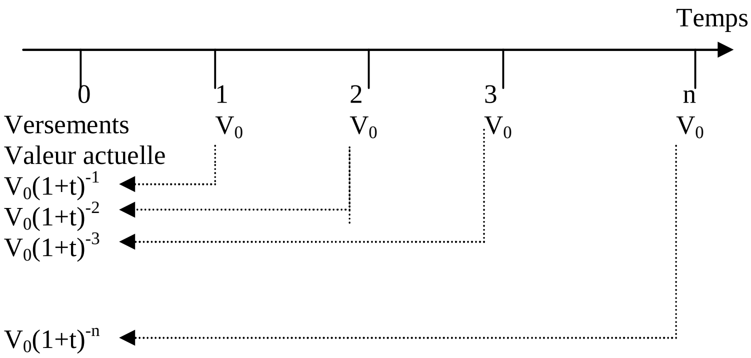
Pour ce faire, nous utiliserons les relations du chapitre 3 car les calculs sur les annuités sont du domaine des mathématiques financières à moyens et longs termes.

4.2. VALEUR ACTUELLE D'ANNUITES CONSTANTES.

4.2.1. ANNUITES EN FIN DE PERIODES.

On considère le cas de n annuités constantes, versées en fin de période, et l'on se propose de calculer la valeur actuelle, à aujourd'hui, de ces n annuités.

On prend t comme taux d'intérêt ; on verra, par la suite, qu'on pourra l'appeler aussi, taux d'actualisation, c'est-à-dire le taux qui sert à calculer la valeur actuelle d'une somme d'argent versée ultérieurement.



$$Va = V_0\,(1+t)^{-1} + V_0\,(1+t)^{-2} + V_0\,(1+t)^{-3} + \ldots + V_0\,(1+t)^{-n}$$
$$= V_0\,(1+t)^{-n}\,[\,1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{n-1}]$$

L'expression entre crochets est égale à $\dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$

$$Va = V_0\,(1+t)^{-n}\,\frac{(1+t)^n - 1}{t} = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

La valeur actuelle, aujourd'hui, d'une suite de n annuités, toutes égales à a et versées, à la fin de chaque période est donnée par la relation :

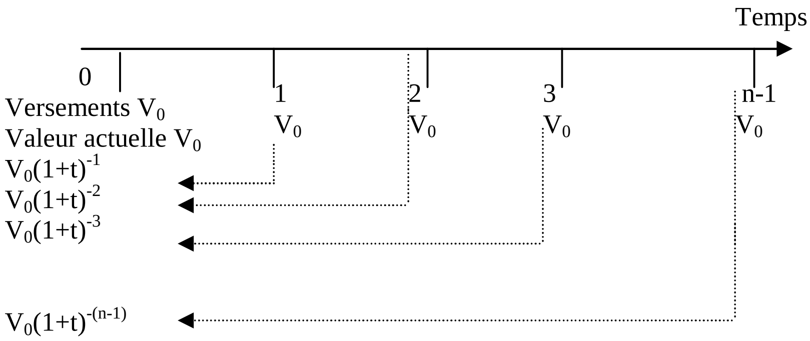
$$\mathbf{Va = a\,\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}} \qquad \mathbf{(4.1)}$$

Remarque 1 : Comme nous l'avons fait remarquer, dans le chapitre 3, la valeur du taux t, dans les relations du présent chapitre, sont en pourcentage, c'est-à-dire que t = 9 % = 0,09 et non 9 seulement, comme nous faisions, dans la 1ère partie consacrée aux mathématiques financières à court terme.

4.2.2. ANNUITES EN DEBUT DE PERIODES.

Nous pouvons, comme nous l'avons fait en 4.2.1, schématiser sur un axe du temps,les n annuités versées en début de périodes:

On prendra, toujours, t comme taux d'intérêt ou d'actualisation.



$$Va = V_0 + V_0(1+t)^{-1} + V_0(1+t)^{-2} + V_0(1+t)^{-3} + \ldots + V_0(1+t)^{-(n-1)}$$
$$= V_0\,(1+t)^{-(n-1)}\,[\,1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{n-1}]$$

L'expression entre crochets est égale à $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$

$$Va = V_0\ (1+t)^{-(n-1)} \times \frac{(1+t)^n - 1}{t} = V_0\ (1+t)\ \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

La valeur actuelle, aujourd'hui, d'une suite de n annuités toutes égales à a et versées, au dèbut de chaque période est donnée par la relation:

$$\mathbf{Va = a\ (1 + t)\ \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}} \qquad \mathbf{(4.2)}$$

Exemple 4.1. : Calcul de la valeur actuelle d'annuités constantes.

M. Rachid décide de placer, régulièrement, à la fin de chaque année, la somme de 5 250 DH; quelle est la valeur actuelle de ses placements sur 5 ans ? Le taux d'actualisation t est égal à 8 %.

Formalisons le problème posé.
Calculer Va si a = 5 250 DH, n = 5 et t = 8 %.

Solution algébrique.
La relation (4.1) donne par le calcul:

$$Va = a\ \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} = 5\ 250 \times \frac{1 - 1{,}08^{-5}}{0{,}08} = 20\ 961{,}73 \text{ DH}$$

Solution à l'aide des tables financières:
La table T4a donne pour t = 8 % et n = 5
Va = 5 250 x 3,99271 = 20 961,73 DH, ce qui est le résultat obtenu algébriquement.

Exemple 4.2. : Calcul du taux d'actualisation.

Mme Saïda a placé, à la fin de chaque année, la somme de 4 500 DH; quel est le taux d'intérêt si la valeur actuelle de ses placements sur 6 ans est de 20 368,49 DH?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si a = 4 500 DH, n = 6 et Va = 20 368,49 DH.

Solution à l'aide des tables financières:

La table T4a donne pour n = 6 et Va = 20 368,49/ 4 500 = 4,52633 un taux t = 8,70 %

Exemple 4.3. : Calcul du nombre d'annuités.

Calculer les nombre de placements d'un montant de 5000 DH, à la fin de chaque année, afin que la valeur actuelle de ses placements soit égale à 31 741,05, sachant que t = 10,50 %.

Formalisons le problème posé.

Calculer n si a = 5 000 DH, t = 10,50 % et Va = 31 741,05 DH.

Solution algébrique.

La relation (4.1) donne par le calcul:

$$\frac{\text{Va t}}{\text{a}} = 1 - (1 + t)^{-n} \text{ soit } n = \frac{\text{Log}(a / (a - t\,\text{Va}))}{\text{Log}(1 + t)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\ (5\,000 / (5\,000 - 0{,}105 \times 31741{,}05))}{\text{Log}(1{,}105)} = 11 \text{ ans}$$

Solution à l'aide des tables financières:

La table T4a donne pour t = 10,50 % et Va / a = 6,34821 => n = 11 ans.

Exemple 4.4. : Calcul du montant de l'annuité.

On décide de placer, à la fin de chaque année, une somme constante d'argent. La valeur actuelle de ces placements sur 4 ans est 72 500 DH. Quelle est la valeur de l'annuité, si le taux d'actualisation est t = 9 %.

Formalisons le problème posé.
Calculer a si Va = 72 500 DH, n = 4 et t = 9 %.

Solution algébrique.
La relation (4.1) donne par le calcul :

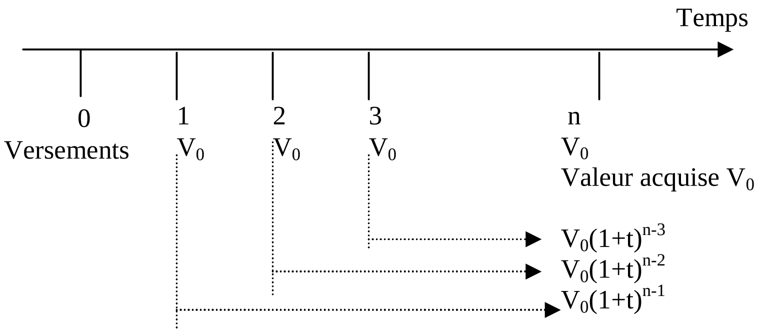
$$a = Va \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}} = 72\,500 \text{ x } \frac{0{,}09}{1 - 1{,}09^{-4}} = 22\,378{,}47 \text{ DH}$$

Solution à l'aide des tables financières :
La table T4a donne pour n= 4 et t = 9 % => Va = 3,23972 a
Ce qui fait pour a = 72 500 / 3,23972 = 22 378,48 DH

4.3. VALEUR ACQUISE D'ANNUITES CONSTANTES.

4.3.1. ANNUITES EN FIN DE PERIODE.

Nous pouvons, comme nous l'avons fait au paragraphe 4.2., schématiser, sur l'axe du temps, les n annuités versées en fin de périodes :



$$VA = V_0(1+t)^{n-1} + V_0(1+t)^{n-2} + V_0(1+t)^{n-3} + \ldots + V_0$$
$$= V_0 \left[1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{n-1} \right]$$

L'expression entre crochets est égale à $\dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$

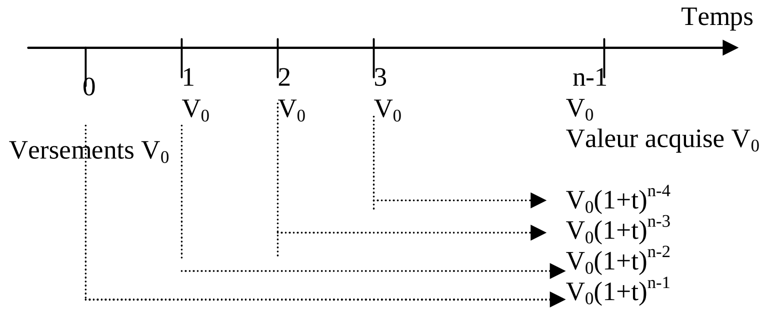
$$VA = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

La valeur acquise, à la date n, d'une suite de n annuités toutes égales à a et versées, en fin de périodes est donnée par la relation :

$$\mathbf{VA = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}} \qquad \textbf{(4.3)}$$

4.3.2. ANNUITES EN DEBUT DE PERIODE.

Nous pouvons, comme nous l'avons fait en 4.2., schématiser, sur l'axe du temps, les n annuités versées en début de périodes :



A la date (n – 1) on a

$$VA = V_0(1+t)^{n-1} + V_0(1+t)^{n-2} + V_0(1+t)^{n-3} + \ldots + V_0$$
$$= V_0 [\, 1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{n-1}]$$

A la date n on a

$$VA = V_0 (\, 1 + t\,)[\, 1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{n-1}]$$

L'expression entre crochets est égale à $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$

La valeur acquise, à la date n, d'une suite de n annuités toutes égales à a et versées, en dèbut de périodes, est donnée par la relation :

$$\mathbf{VA = a\,(1 + t)\,\frac{1 - (1+t)^n}{t}} \qquad \mathbf{(4.4)}$$

Exemple 4.5. : Calcul de la valeur acquise d'annuités constantes.

Un épargnant décide de mettre, à la fin de chaque année, une épargne de 5 250 DH. Combien aura-t-il après 7 années d'épargne, si le taux d'intérêts est 10 %?

Formalisons le problème posé.
Calculer VA si a = 5 250 DH, n = 7 et t = 10 %.

Solution algébrique.
La relation (4.3) donne par le calcul:

$$VA = a\frac{(1+t)^{n} - 1}{t} = 5\,250 \times 9{,}48717 = 49\,807{,}64 \text{ DH}$$

Solution à l'aide des tables financières:
La table T5a donne pour n= 7 et t = 10 % => VA = 9,48717 a
Ce qui fait pour VA = 9,48717 x 5250 = 49 807,64 DH

Exemple 4.6. : Calcul du taux d'actualisation.

Quel est le taux d'intérêt d'une suite de 17 mensualités de 7 250 DH, versées à la fin de chaque mois et qui acquiert une valeur, au bout des 17 mois, de 133 348,59 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si a = 7250 DH, n = 17 et VA = 133 348,59 DH

Solution à l'aide des tables financières:
La table T5b donne pour n= 17 et VA /a = 133 348,59 / 7 250 un taux mensuel t_m = 0,975 %, ce qui correspond, d'après la relation (2.) à un taux annuel, t = 12,35 %

Exemple 4.7. : Calcul du nombre d'annuités.

Combien doit verser un épargnant d'annuités de 4 500 DH, à la fin de chaque année, pour constituer un capital de 57 621,20 DH ? Le taux d'intérêt étant égal à 8,60 %

Formalisons le problème posé.
Calculer n si a = 4 500 DH, Va = 57 621,20 DH et t = 8,6 %.

Solution à l'aide des tables financières:
La table T5a donne pour VA / a = 57 621,20 / 4 500 = 12,80471 et t = 8,60 %, le nombre n = 9

Exemple 4.8. : Calcul du montant de l'annuité.

Combien doit déposer, au début de chaque mois, un épargnant, pendant 26 mois afin de percevoir, à la fin, une somme égale à 70 000 DH ? Le taux d'intérêt est de 9,20 %

Formalisons le problème posé.
Calculer a si VA = 70 000 DH, n = 26 et t = 9,20 %.

Calculons, d'abord le taux d'intérêt mensuel correspondant au taux d'intérêt annuel de 9,20 %.
La table T3 donne pour t = 9,20 % un tm = 0,736 %

Solution algébrique.
L'utilisation de la relation (4.4) donne :

$$VA = a\,(1+t)\,\frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow a = \frac{VA\ t}{(1+t)\,[\,(1+t) - 1\,]}$$

$$\text{Soit } a = \frac{70\,000 \times 0{,}00736}{1{,}00736\,[\,(1{,}00736)^{26} - 1\,)\,]} = 2\,434{,}86 \text{ DH}$$

Remarque 2 : Dans tous ces calculs, nous avons, sciemment donné des exemples dont les résultats tombent exacts, car notre objectif essentiel était d'abord de nous entrainer à pratiquer les relations du chapitre 4.

Nous donnons, dans ce qui suit, quelques cas d'application, pour lesquels, nous serons amenés à utiliser la méthode d'interpolation linéaire. Pour ce faire, nous ne donnerons que les solutions qui utilisent les tables financières.

Exemple 4.9. : Calcul de la valeur acquise d'annuités

Une dame dépose, à la fin de chaque mois, une somme d'argent égale à 2 500 DH. Combien retirera-t-elle au bout de 15 mois de dépôt, si le taux d'intérêt annuel est de 9 %?

Formalisons le problème posé.

Calculer Va si a = 2 500 DH, n = 15 mois et t = 9 %.

Solution à l'aide des tables financières.

Nous utiliserons la méthode d'interpolation linéaire.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9 % est, d'après la table T3, t_m = 0,721 %.

L'utilisation de la table T5b donne pour n = 15 et

Pour t_1 = 0,700 % un a_1 = 15,75777

Pour t_2 = 0,725 % un a_2 = 15,78569

Ainsi pour Δ t = 0,025 % on a Δ a = 0,02792

Donc pour Δ t = 0,021 %

On aura Δ a = 0,02792 x 0,021/ 0,025 = 0,02345

Ce qui donne a = 15,57777 + 0,02345 = 15,60569

VA = 15,60569 x 2 500 = 39 014,23 DH

Remarque 3 : En utilisant la méthode algébrique, on a :

$$VA = 2500 \times \frac{1{,}00721^{15} - 1}{0{,}00721} = 39\ 453{,}06 \text{ DH}$$

La différence vient de ce que le calcul par l'interpolation linéaire, à partir des tables financières, comportent des approximations. Dans ce cas particulier, l'approximation est de 1,11 % ce qui n'est pas très important.

Exemple 4.10. : Calcul du taux d'actualisation.

A quel taux d'actualisation doit-on actualiser 7 mensualités de 3 500 DH, de fin de période, pour que la valeur actuelle soit égale à 23 500 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si a = 3 500 DH, Va = 23 300 DH, n = 7.

Solution à l'aide des tables financières:
Nous utiliserons la méthode d'interpolation linéaire.
On a Va / a = 23 500 / 3 500 = 6,71429

La table T4b donne pour n= 7 et
Va / a = 7,71951 t = 0,800 %
Va / a = 7,71099 t = 0,825 %
Ainsi pour Δ (Va / a) = - 0,00852 on a Δ t = 0,025 %
Donc pour Δ (Va / a) = - 0,00522
On aura Δ t = 0,025 % x 0,00522 / 0,00852 = 0,01532 %
Soit t = 0,800+ 0,01532 = 0,815 %.

Remarque 4 : Dans tous les exemples de ce chapitre, nous avons donnés des annuités constantes afin de pouvoir appliquer, telles quelles les relations trouvées ci-dessus.

Que ce passe-t-il, dans le cas d'annuités non constantes?

Exemple 4.11. : Etude de cas d'annuités non constantes.

Pour regler un achat, ADIL doit effectuer 7 versements, à la fin de chaque mois.

Les 7 mensualités sont comme suit :

- 3 mensualités de 5 500 DH;
- 2 mensualités de 3 900 DH;
- 2 mensualités de 2 700 DH.

Au taux d'actualisation de 11 %, calculer la valeur actuelle et la valeur acquise des 7 mensualités.

A quel taux doit-on actualiser ces 7 mensualités si l'on désire avoir une valeur actuelle de 29 000 DH?

Formalisons le problème posé.

Calculer Va et VA si t = 11 %, n = 7 et les annuités sont :
5 500; 5 500; 5 500; 3 900; 3 900; 2 700; 2 700 DH.

Calculer t si Va = 29 000 Dh, n = 7 et les mensualités sont :
5 500; 5 500; 5 500; 3 900; 3 900; 2 700; 2 700 DH.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11 % est $t_m = 0{,}873$ %.

Dressons le tableau de calcul des Va et VA.

Epoques i	**Annuités a_i**	**$a_i (1 + t)^{-i}$**	**$a_i (1 + t)^{j}$**
0		5 452,40	- - -
1	5 500	5 405,21	5 794,45
2	5 500	5 358,43	5 744,30
3	5 500	3 766,73	5 694,59
4	3 900	3 734,13	4003,04
5	3 900	2 562,80	3 968,39
6	2 700	2 540,62	2 723,57
7	2 700	- - -	2 700,00
Total		**Va = 28 820,32**	**VA = 30 628,34**

Remarquons tout d'abord que j = 7 – i

Pour le calcul du taux d'actualisation qui donne une valeur actuelle de 29 000 DH, nous devons procéder, par tatonnement et finir par une interpolation linéaire.

Dressons un tableau de calculs intermédiaires des annuités actualisées : $a_i\ (1 + t)^{-i}$ selon plusieurs taux d'actualisation :

Epoques i	**t = 9 %**	**t = 8 %**	**t = 8,50 %**
0	5 460,63	5 464,86	5 462,74
1	5 421,54	5 429,95	5 425,74
2	5 382,73	5 395,25	5 388,99
3	3 789,52	3 801,28	3 795,40
4	3 762,40	3 777,00	3 769,69
5	2 586,09	2 598,14	2 592,11
6	2 567,58	2 581,54	2 574,55
7	- - -	- - -	- - -
TOTAL Va	**28 970,49**	**29 048,02**	**29 009,22**

Ainsi, le taux cherché est compris entre 8 % et 8,50 %.

Pour t = 8,50 % on a Va = 29 009,22 DH
Pour t = 9 % on a Va = 28 970,49 DH

Ce qui donne pour Δ t = 0,50 % un ΔVa = 38,73
Donc pour ΔVa = 9,22 on aura
Δ t = 0,50 % x 9,22 / 38,73 = 0,1 %

et t = 8,50 %+ 010 % = 8,60 %

Exemple 4.12. : Calcul de la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de périodes.

Afin de pouvoir disposer d'une somme d'argent, d'ici 36 mois, AZIZ décide d'épargner 2 500 DH, pendant 7 mois, 3 500 DH, pendant 10 mois et 4 500 DH, le reste du temps. Il s'agit d'épargne déposée à la fin de chaque mois.

De combien disposera-t-il, dans 3 ans, si le taux de son épargne est de 8 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer VA_1, VA_2 et VA_3 si a_1 = 2 500 DH, n_1 = 7 mois, a_2 = 3 500 DH, n_2 = 10 mois, a_3 = 4 500 DH, n_3 = 19 mois et t = 8 %.

Attention : VA_1 est acquise, au bout de 7 mois ; il faut donc calculer sa valeur acquise, au 36ème mois.

De même, VA_2 est acquise, au bout de 17 mois ; il faut donc calculer sa valeur acquise, au 36ème mois.

Calculons, d'abord, le taux mensuel équivalent au taux annuel de 8 %. La table T3 donne : t_m = 0,643 %

La relation (4.3) donne : $VA = a\,\dfrac{(1+t_m)^n - 1}{t_m}$

$$VA_1 = 2\,500 \times \frac{1{,}00643^7 - 1}{0{,}00643} = 17\,841{,}22 \text{ DH}$$

Nous devons calculer ce que devient cette somme au 36ème mois, c'est-à-dire, dans 29 mois. Pour ce faire, la relation (3.1) donne :

$VA_1' = VA_1 \text{ x } (1{,}00643)^{29}$ = 21 488,04 DH.

$$VA_2 = 3\,500 \times \frac{1{,}00643^{10} - 1}{0{,}00643} = 36\,030{,}29 \text{ DH}$$

Nous devons calculer ce que devient cette somme au $36^{ème}$ mois, c'est-à-dire, dans 19 mois. Pour ce faire, la relation (3.1) donne :

$VA_2' = VA_2 \times (1{,}00643)^{19} = 40\ 696{,}37$ DH.

$$VA_3 = 4\ 500 \times \frac{1{,}00643^{19} - 1}{0{,}00643} = 90\ 632{,}90 \text{ DH}$$

Ainsi AZIZ disposera, au bout de 36 mois, d'une épargne égale à :

$VA = VA_1' + VA_2' + VA_3 = 152\ 817{,}31$ DH.

Exemple 4.13. : Calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de périodes.

Reprendre le problème précédent et calculer la valeur actuelle de l'épargne de AZIZ.

On ne se basera pas sur les résultats de l'exemple précédent.

Formalisons le problème posé.

Calculer Va_1, Va_2 et Va_3 si $a_1 = 2\ 500$ DH, $n_1 = 7$ mois, $a_2 = 3\ 500$ DH, $n_2 = 10$ mois, $a_3 = 4\ 500$ DH, $n_3 = 19$ mois et $t = 8$ %.

Attention : Va_2 est actualisée, le 7ème mois ; il faut donc calculer sa valeur actuelle, aujourd'hui.

De même, VA_3 est actualisée, le 17ème mois ; il faut donc calculer sa valeur actuelle, aujourd'hui.

On a toujours $t_m = 0{,}643$ %.

La relation (4.1) donne : $Va = a \dfrac{1 - (1 + t_m)^{-n}}{t_m}$

$$Va_1 = 2\,500 \times \frac{1{,}00643^{-7} - 1}{0{,}00643} = 17\,088{,}44 \text{ DH}$$

$$Va_2 = 3\,500 \times \frac{1{,}00643^{-10} - 1}{0{,}00643} = 33\,793{,}41 \text{ DH}$$

Nous devons calculer la valeur actuelle de cette somme, aujourd'hui, alors qu'elle intervient le 7ème mois. Pour ce faire, la relation (3.2) donne :

$Va_2' = Va_2 \times (1{,}00643)^{-7} = 32\,310{,}75$ DH.

$$Va_3 = 4\,500 \times \frac{1{,}00643^{-19} - 1}{0{,}00643} = 80\,241{,}30 \text{ DH}$$

Nous devons calculer la valeur actuelle de cette somme, aujourd'hui, alors qu'elle intervient le 17ème mois. Pour ce faire, la relation (3.2) donne :

$Va_2' = Va_2 \times (1{,}00643)^{-17} = 71\,957{,}69$ DH.

La valeur actuelle de l'épargne de AZIZ est donc égale à :

$Va = Va_1 + Va_2' + Va_3' = 121\,326{,}89$ DH.

De ce résultat, nous pouvons déduire, directement, la valeur acquise par l'épargne de AZIZ, dans 36 mois :

$VA = 121\,326{,}89 \times (1 + t_m)^{36} = 152\,814{,}89$ DH.

Ce qui est presque le résultat trouvé à l'exemple 6.12. La différence vient des arrondis faits dans les calculs.

Après l'étude des mathématiques financières à moyen et long termes et les calculs sur les annuités, nous pouvons aborder la partie réservée aux mathématiques financières approfondies relativisées aux calculs sur les emprunts et les investissements.

PARTIE 3 - MATHEMATIQUES FINANCIERES APPROFONDIES.

Les mathématiques financières approfondies s'intéressent aux calculs sur les emprunts et les investissements de l'entreprise. Elles sont donc, essentiellement, des domaines du moyen et long termes.

CHAPITRE 5 - LES EMPRUNTS.

5.1. DEFINITION.

On parle d'emprunts et de prêts, chaque fois qu'une personne physique ou morale prête de l'argent à une autre personne physique ou morale.

On parlera, surtout d'emprunts et non de prêts, car on se placera, toujours du côté de celui qui doit rembourser la somme qui lui a été prêtée.

On distingue, généralement, deux types d'emprunts :

- Emprunt indivis, lorsque le prêteur est une seule personne physique ou morale ; cette personne peut aussi être une association de plusieurs personnes pilotées par l'une d'entre elles et qui agissent comme une seule personne.

- Emprunt obligataire, lorsqu'il y a un grand nombre de prêteurs et seulement un seul emprunteur qui peut être une entreprise ou l'état.

Les calculs sur les emprunts s'intéressent aux modalités de leurs remboursements.

Ce chapitre sera consacré à cette étude.

5.2. L'EMPRUNT INDIVIS.

On parle d'emprunt indivis, lorsqu'une une entreprise, pour financer son fonctionnement ou ses investissements, emprunte de l'argent à une banque ou un consortium de banques piloté par l'une d'entre elles.

Cet emprunt peut être remboursé de deux façons :

- Par annuités constantes ;
- Par amortissements constants.

5.2.1. EMPRUNT INDIVIS REMBOURSE PAR ANNUITES CONSTANTES

On considère donc une entreprise qui a emprunté, à sa banque, une somme d'argent C et qui s'engage à la rembourser, par n annuités constantes, a, à la fin de chaque période, le taux d'intérêt est supposé être égal à t.

Dressons le tableau des remboursements :

Périodes	**Annuités**	**Valeurs actuelles des annuités à 0**
0		(a) $(1 + t)^{-1}$
1	(a)	(a) $(1 + t)^{-2}$
2	(a)	(a) $(1 + t)^{-3}$
3	(a)	(a) $(1 + t)^{-4}$
...	…	…
(n – 1)	(a)	(a) $(1 + t)^{-n}$
n	(a)	

Le principe de calcul consiste à identifier C, capital emprunté, à la somme des valeurs actuelles des n annuités versées annuellement, à la fin de chaque période, par l'entreprise à sa banque.

$$C = a\,[(1+t)^{-1} + (1+t)^{-2} + (1+t)^{-3} + \ldots (1+t)^{-n}\,]$$

On retrouve exactement les calculs que nous avons, déjà faits pour les annuités, au chapitre 4.

On a donc, en reprenant la relation (4.1) du chapitre 4 :

$$\mathbf{C = a\,\frac{1 - (1 + t)^{-n}}{t}} \qquad \mathbf{(4.1)}$$

la relation qui donne a en fonction de C, de t et de n :

$$\mathbf{a = C\,\frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}}} \qquad \mathbf{(5.1)}$$

On peut calculer la somme totale S des n annuités ainsi que le montant total I des intérêts payés :

$$\mathbf{S = n\,a = \frac{n\,C\,t}{1-(1+t)^{-n}}} \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$\mathbf{I = n\,a - C = C\left[\frac{n\,t}{1-(1+t)^{-n}} - 1\right]} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Remarque 1 : Dans les calculs de la somme S et des intérêts I, nous avons additionné des sommes d'argent qui interviennent à des périodes différentes. Il ne faut pas perdre de vue, qu'une somme d'argent est toujours affectée de la date de son avènement.

Exemple 5.1. : Calcul de l'annuité constante.

La société SOTEL a emprunté 250 000 DH à la BCM au taux annuel de 11 % et remboursable sur 5 ans, par annuités constantes. Quelle est le montant de l'annuité ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a si C = 250 000 DH, n = 5 et t = 11 %.

Solution algébrique :

L'utilisation de la relation (5.1) donne immédiatement a :

$$a = C\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = 250\,000 \times \frac{0{,}11}{1-1{,}11^{-5}} = 67\,642{,}58\ \text{DH}$$

Solution à l'aide des tables financières.

L'utilisation de la table T6a avec les conditions t = 11 % et n = 5 donne pour a :

a = 250 000 x 0,27057 = 67 642,50 DH.

La déférence entre les deux résultats vient des arrondis faits dans les calculs avec les tables financières.

Remarque 2 : Dans ce paragraphe, on doit retrouver tous les cas des annuités que nous avons étudiés au chapitre 4, à savoir le cas d'annuités en fin de périodes et celui des annuités en début de périodes. On utilisera, selon le cas, la relation (4.1) ou la relation (4.2).

Exemple 5.2. : Etablissement du tableau de remboursement par annuités constantes.

L'entreprise MATECH contracte un emprunt auprès de la B.M.C.I. d'un montant de 100 000 DH, remboursable par annuités constantes, de fin de périodes, sur 3 années. Dresser le tableau des remboursements si le taux d'intérêt est 10 %.

Formalisons le problème posé.

Dresser le tableau des remboursements de l'emprunt suivant :

C = 100 000 DH, n = 3 et t = 10 %.

Calculons d'abord l'annuité a.

$$a = C\,\frac{t}{1-(1+t)^{-3}} = 100\,000 \times \frac{0{,}10}{1-1{,}10^{-3}} = 40\,211{,}48 \text{ DH}$$

Dressons maintenant le tableau des remboursements.

Périodes	Annuités constantes	Intérêts de la période	Amortissement du capital	Capital restant dû
0				100 000
1	40 211,48	10 000,00	30 211,48	69 788,52
2	40 211,48	6 978,85	33 232,63	36 555,89
3	40 211,48	3655,59	36 555,89	0,00
Total	**120 634,44**	**20 634,44**	**100 000,00**	**…**

5.2.2. EMPRUNT INDIVIS REMBOURSE PAR AMORTISSEMENTS CONSTANTS.

On considère, toujours, une entreprise qui emprunte, à sa banque, une somme d'argent C et qui s'engage à la rembourser, par n annuités, a, non constantes, à la fin de chaque année ; le taux d'intérêt étant égal à t :

Ici, l'annuité n'est pas constante. Ce sont les amortissements de l'emprunt qui le sont, en ce sens, que chaque annuité est composée :

- du montant de l'amortissement, égal à $m = C / n$;
- du montant des intérêts sur le capital restant dû.

Dressons le tableau des remboursements :

Périodes	**Amortissements**	**Valeurs annuités versées**
0	(m)	
1	(m)	$a_1 = (m + t\,C)$
2	(m)	$a_2 = [m + t\,(C - m)]$
3	(m)	$a_3 = [m + t\,(C - 2m)]$
4	(m)	$a_4 = [m + t\,(C - 3m)]$
…	…	…
n - 1	(m)	$a_{n-1} = [m + t\,(C - (n-2)m)]$
n	(m)	$a_n = [m + t\,(C - (n-1)m)]$

Nous pouvons écrire :

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{n}} \qquad \mathbf{(5.4)}$$

On peut calculer la somme totale S des n annuités ainsi que le montant total I des intérêts payés :

S = (m + t C) + [m + t (C - m)] + [m + t (C - 2m)] + . . . + [m + t (C - (n - 2)m)] + [m + t (C - (n - 1)m)]
= n m + n t C - t m [1 + 2 + 3 + . . . + (n - 1)]

$$\mathbf{S = C + \frac{(n+1)\,t\,C}{2}} \qquad \textbf{(5.5)}$$

$$\mathbf{I = \frac{(n+1)\,t\,C}{2}} \qquad \textbf{(5.6)}$$

Remarque 3 : Nous faisons la même remarque 2 ; dans les calculs de la somme S et des intérêts I, nous avons additionné des sommes d’argent qui interviennent à des périodes différentes. Il ne faut pas perdre de vue, qu’une somme d’argent est toujours affectée de la date de son avènement.

Exemple 5.3. : Remboursement d’un emprunt par amortissements constants.

L’entreprise SOMAG emprunte 51 000 DH à la S.G.M.B. pour un remboursement, par amortissements constants, sur 3 années. Calculer les montants des annuités ainsi que celui des intérêts payés, si le taux d’intérêt est 9 %.

Formalisons le problème posé.

Calculer a_1, a_2, a_3, annuité à amortissements constants et I si C = 51 000 DH, n = 3 et t = 9 %.

Les calculs du tableau ci-dessus, ainsi que la relation (5.6) donnent pour a_1, a_2, a_3, et I :

D'abord calculons m = 51 000 / 3 = 17 000 DH

$$a_1 = m + t\ C = 17\,000 + 0{,}09 \times 51\,000 = 21\,590 \text{ DH}$$

$$a_2 = m + t\ (C - m) = 17\,000 + 0{,}09\ (34\,000) = 20\,060 \text{ DH}$$

$$a_3 = m + t\ (C - 2\ m) = 17\,000 + 0{,}09\ (17\,000) = 18\,530 \text{ DH}$$

$$I = \frac{(n + 1)\ t\ C}{2} = \frac{4 \times 0{,}09 \times 51\,000}{2} = 9\,180 \text{ DH}$$

On trouve bien que : $I = a_1 + a_2 + a_3 - C$ = 9 180 DH.

Faisons ces calculs sur tableau :

Périodes	**Amortissements**	**Capital restant dû**	**Intérêt de la période**	**Annuité**
0	0	51 000	-	-
1	17 000	34 000	4 590	21 590
2	17 000	17 000	3 060	20 060
3	17 000	0	1 530	18 530
TOTAL	**51 000**	**.**	**9 180**	**60 080**

Exemple 5.4. : Etablissement du tableau de remboursement par amortissements constants.

Une société emprunte 55 000 DH sur 5 ans et s'engage à les rembourser par amortissements constants. Dresser le tableau des amortissements si le taux d'intérêt est égal à 8,50 %.

Formalisons le problème posé.

Dresser le tableau de remboursement par amortissements constants d'un emprunt indivis tels que C = 55 000 DH, n = 5 et t = 8,50 %.

Calculons d'abord m = C / n = 55 000 / 5 = 11 000 DH.

Le tableau de remboursement est :

Périodes	Amortissements	Capital restant dû	Intérêts de la période	Montant annuité
0		55 000,00		
1	11 000,00	44 000,00	4 675,00	15 675,00
2	11 000,00	33 000,00	3 740,00	14 740,00
3	11 000,00	22 000,00	2 805,00	13 805,00
4	11 000,00	11 000,00	1 870,00	12 870,00
5	11 000,00	0,00	935,00	11 935,00
Total	**55 000,00**		**14 025,00**	**69 025,00**

On trouve bien :
Total des amortissements C = 5 x 11 000 = 55 000 DH
Total des intérêts I = 69 025 – 55 000 = 14 025 DH

Nous pouvons, à ce niveau de notre étude, dresser un tableau comparatif des deux types de remboursement d'un emprunt indivis.

Intitulés	Par annuités constantes	Par amortissements constants
Annuité de rang k	$a = C \dfrac{t}{1 - (1 + t)^{-n}}$	$a_k = [m + t\,(C - km)]$
Annuité de rang (k+1)	$a = C \dfrac{t}{1 - (1 + t)^{-n}}$	$a_{k+1} = [m + t\,(C - (k+1)\,m)]$
Caractéristiques	Constantes	En progression arithmétique de raison : (- m t)

Exemple 5.5. : Etablissement des tableaux de remboursement d'un emprunt indivis.

Une entreprise contracte, auprès de sa banque, un emprunt de 150 000 DH, remboursable sur 3 années par trimestrialités.

Dresser le tableau de remboursement par trimestrialités constantes ainsi que celui du remboursement par amortissements constants et faites la comparaison de ces deux modalités.

On donne pour taux d'intérêt t = 9 % l'an.

Formalisons le problème posé.

On a C = 150 000 DH, n = 12 trimestres, t = 9 % par an.

Dresser le tableau de remboursement par trimestrialités constantes.

Dresser le tableau de remboursement par amortissements constants.

Comparer les deux modalités.

Dans les deux cas, on doit calculer :

Le taux d'intérêt trimestriel équivalent au taux annuel de 9 %, pour ce faire, la table financière T3 donne t_t = 2,1778 % pour t = 9 %.

Dans ces conditions, nous avons :

Trimestrialité constante $a = C \dfrac{t_t}{1 - (1 + t_t)^{-n}}$ =14 339,27DH

Amortissement constant m = 150 000 / 12 = 12 500 DH

Nous pouvons, alors dresser le tableau de remboursement par trimestrialités constantes :

Remboursement par annuités constantes				
Périodes	**Annuités constantes**	**Intérêts de la période**	**Amortissement du capital**	**Capital restant dû**
0				150 000,00
1	14 339,27	3 266,70	11 072,57	138 927,43
2	14 339,27	3 025,56	11 313,71	127 613,72
3	14 339,27	2 779,17	11 560,10	116 053,62
4	14 339,27	2 527,41	11 811,86	104 241,76
5	14 339,27	2 270,18	12 069,09	92 172,67
6	14 339,27	2 007,34	12 331,93	79 840,74
7	14 339,27	1 738,77	12 600,50	67 240,24
8	14 339,27	1 464,36	12 874,91	54 365,33
9	14 339,27	1 183,97	13 155,30	41 210,03
10	14 339,27	897,47	13 441,80	27 768,23
11	14 339,27	604,74	13 734,53	14 033,70
12	14 339,27	305,63	14 033,64	Presque 0
Total	**172 071,24**	**22 071,29**		

Nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

Le montant total des intérêts payés I = 22 071,29 DH

La somme des 12 trimestrialités payées est égale à 172 071,24 DH

La somme de la colonne 4 doit être égal à 150 000 DH, la différence vient des différents arrondis faits pendant les calculs.

La somme des valeurs actuelles des 12 trimestrialités est, par définition, égale à la valeur du prêt : 150 000 DH.

Nous pouvons, aussi dresser le tableau de remboursement par amortissements constants :

Remboursement par amortissements constants				
Périodes	**Amortissements**	**Capital restant dû**	**Intérêts de la période**	**Montant annuité**
0		150 000		
1	12 500	137 500	3 266,70	15 766,70
2	12 500	125 000	2 994,48	15 494,48
3	12 500	112 500	2 722,25	15 222,25
4	12 500	100 000	2 450,23	14 950,23
5	12 500	87 500	2 177,80	14 677,80
6	12 500	75 000	1 905,58	14 405,58
7	12 500	62 500	1 633,35	14 133,35
8	12 500	50 000	1 361,13	13 861,13
9	12 500	37 500	1 088,90	13 588,90
10	12 500	25 000	816,68	13 316,68
11	12 500	12 500	544,45	13 044,45
12	12 500	0	272,23	12 772,23
Total	**150 000**	**---**	**21 233,78**	**171 233,78**

Nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

Le montant total des intérêts payés I = 21 233,78 DH

La somme des valeurs actuelles des 12 trimestrialités est égale à :

Sa = 15 766,70 x $1,021778^{-1}$ + 15 494,48 x $1,021778^{-2}$ + 15 222,25 x $1,021778^{-3}$ + 14 950,23 x $1,021778^{-4}$ + 14 677,80 x $1,021778^{-5}$ + 14 405,58 x $1,021778^{-6}$ + 14 133,35 x $1,021778^{-7}$ + 13 861,13 x $1,021778^{-8}$ + 13 588,90 x $1,021778^{-9}$ + 13 316,68 x $1,021778^{-10}$ + 13 044,45 x $1,021778^{-11}$ + 12 772,23 x1, 021778^{-12} = 148 920,92 DH.

Comparons, maintenant les deux modalités de remboursement de l'emprunt.

Thèmes	**Remboursement par annuités constantes**	**Remboursement par amortissements constants**
Annuités	Constantes	Décroissantes
Total des intérêts	22 071,29 DH	21 233,78 DH
Total remboursé	172 071,29 DH	171 233,78 DH
Somme des valeurs actuelles des annuités	150 000,00 DH	148 920,92 DH

On constate, ainsi :

- Le remboursement par annuités constantes permet une gestion facile de la trésorerie de l'entreprise ;
- Le remboursement par amortissements constants permet un remboursement accéléré ;
- Tant du point de vue des intérêts payés, que du point de vue des sommes actualisées des annuités remboursées, la différence est minime, elle n'est que de 837,51 DH soit 0,5% du montant du prêt.
- Néanmoins, s'il faut choisir entre les deux modalités de remboursement, le remboursement par amortissements constants semble légèrement avantageux.

5.2.3. TAUX D'INTERET REEL D'UN EMPRUNT INDIVIS.

Lorsqu'une banque accorde un crédit à une entreprise, elle assortit, en général cela, d'un certain nombre de frais :

a) Frais d'étude de dossier ;
b) Frais d'hypothèque et d'enregistrement du prêt ;
c) Frais des retraits périodiques et automatiques de l'annuité du compte de l'entreprise ;
d) Prime d'assurance de l'équipement financé par le prêt ;
e) etc.

Les frais a et b, qu'on notera F_0, sont exigés, au départ ; ils diminuent donc la valeur réelle du crédit accordé. Tout se passe comme si la banque n'accorde qu'un crédit $C - F_0$

Les frais c et d, qu'on notera F_p sont exigés, périodiquement ; ils augmentent donc les valeurs des annuités. Tout se passe comme si l'entreprise paie, périodiquement $a_k + F_p$. Ces frais F_p sont généralement constants.

Tout ceci rend le taux réel d'intérêt plus élevé. Le taux réel d'intérêt noté t_r est, alors donné par les relations suivantes.

Dans le cas d'un emprunt indivis remboursable par annuités constantes, on utilisera la relation (5.1) qui devient :

$$\mathbf{a + F_p = \frac{(C - F_0)\, t_r}{1 - (1 + t)^{-n}}} \qquad \textbf{(5.1. bis)}$$

Dans le cas d'un emprunt indivis remboursable par amortissements constants, on utilisera la relation (5.6) qui devient :

$$\mathbf{I + n\,F_p = \frac{(n+1)\,t_r\,(C - F_0)}{2}} \qquad \textbf{(5.6. bis)}$$

Exemple 5.6. : Calcul du taux d'intérêts réel d'un emprunt indivis.

En reprenant les données de l'exemple 5.5, on suppose que :

- *La banque facture 2 500 DH de frais de dossier ;*
- *L'enregistrement de l'hypothèque du crédit coûte 0,5% de son montant ;*
- *La prime d'assurance est de 500 DH par trimestre ;*
- *Les frais des retraits périodiques sont de 25 DH par trimestre.*

Calculer le taux d'intérêts réel trimestriel t_{tr} et annuel t_r .

Ainsi : F_0 = 2 500 + 0,005 x 150 000 = 3 250 DH
F_p = 500 + 25 = 525 DH

Dans le cas d'un remboursement par annuités constantes, on a :

$$a + F_p = \frac{(C - F_0)\,t_{tr}}{1 - (1 + t_{tr})^{-n}}$$

$$y = \frac{t_{tr}}{1 - (1 + t_{tr})^{-12}} = \frac{a + F_p}{C - F_0} = 0{,}101288.$$

Seule la méthode par tâtonnement permet le calcul de t_{tr}. On essaie plusieurs valeurs de t_{tr} pour arriver à encadrer de plus en plus près la valeur de y = 0,101288.

T_{tr}	3 %	3,1 %	3,2 %	3,15 %
Y	0,101462	0,10063	0,101665	0,101364

On considère, pour effectuer une interpolation linéaire, les valeurs 3,1 % et 3,15 % de t_{tr} :

On a pour Δt_{tr} = 0,05 % => Δy = - 0,000301

Donc pour Δy = - 0,000225 => Δt_{tr} =0,05x225/301=0,04 %

Ce qui donne pour t_{tr} = 3,14 % et t_r = 13,16 %, l'an.

Dans le cas d'un remboursement par amortissements constants, on a :

$$I + n\,F_p = \frac{(n+1)\,t_r\,(C - F_0)}{2}$$

$$t_r = \frac{2\,(I + n\,F_p)}{(n+1)\,(C - F_0)} =$$ 2,8964 % qui correspond à un taux annuel de 12,10 % ce qui est supérieur aux taux d'intérêts trimestriel et annuel nominal, à savoir : 2,1778 % et 9 %.

Remarque 4 : on retrouve, ici, l'avantage du remboursement par amortissements constants par rapport au remboursement par annuités contantes, en effet,

Pour le 1er trimestre = 12,10 %,

Pour le 2ème trimestre = 13,16 %

5.3. L'EMPRUNT OBLIGATAIRE.

On parle d'emprunt obligataires, lorsqu'une entreprise ou l'Etat, pour financer leur fonctionnement ou leurs investissements, empruntent de l'argent à une multitude de personnes qui disposent d'épargne.

On dit, alors que l'Etat ou l'entreprise lance un emprunt obligataire, il se caractérise par les données suivantes :

N :	Nombre de titres émis ;
V :	Valeur nominale d'un titre ;
t :	Taux d'intérêt (ou taux nominal) ;
V. t :	Coupon annuel d'intérêt pour un titre ;
n :	Nombre d'années, durée de l'emprunt ;
$M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$:	Nombre de titres amortis au 1er, 2ème, 3ème... nième tirage ;
$N_1, N_2, N_3, \ldots N_n$:	Nombre de titres restant en circulation après le 1er, 2ème, 3ème... nième tirage ;
$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$:	1er, 2ème, 3ème... nième annuité ;

En plus de toutes ces caractéristiques, il reste à spécifier si l'emprunt est remboursé au pair ou au-dessus du pair.

- Un emprunt obligataire est remboursé au pair quand la valeur de remboursement d'une obligation est égale à sa valeur nominale.
- Un emprunt obligataire est remboursé au-dessus du pair quand la valeur de remboursement d'une obligation est supérieure à sa valeur nominale.

5.3.1. EMPRUNT OBLIGATAIRE REMBOURSE AU PAIR.

Dans ce cas, chaque titre est remboursé à sa valeur nominale, V.

Nous distinguerons deux cas :

- Remboursement par annuités constantes ;
- Remboursement par amortissements constants.

Avant de distinguer les deux cas**,** nous nous proposons de récapituler, dans un seul tableau, les données d'un emprunt obligataire, remboursé au pair, tel que nous les avons énoncés, plus haut.

Périodes	Annuités	Titres restant en circulation
1	$A_1 = N\,V\,t + M_1\,V$	$N_1 = N - M_1$
2	$A_2 = N_1\,V\,t + M_2\,V$	$N_2 = N_1 - M_2$
3	$A_3 = N_2\,V\,t + M_3\,V$	$N_3 = N_2 - M_3$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
n	$A_n = N_{n-1}\,V\,t + M_n\,V$	$N_n = N_{n-1} - M_n = 0$

A partir de ce tableau récapitulatif, nous pouvons écrire les relations générales suivantes :

$N_{n-1} = M_n \implies A_n = M_n\,V\,(1 + t)$

(5.a) : $A_{k+1} - A_k = M_{k+1}\,V - M_k\,V\,(1 + t)$

(5.b) : $N\,V = \sum_{i=1}^{i=n} A_i\,(1 + t)^{-i}$

(5.c) : $N = \sum_{i=1}^{i=n} M_i$

Nous utiliserons ces cinq relations pour étudier les deux cas :

5.3.1.1. Emprunt obligataire remboursé au pair et par annuités constantes.

Les relations tirées du tableau synthétique, ci-dessus, deviennent, dans le cas particulier d'un emprunt obligataire remboursé au pair et par annuités constantes :

(5.a) => $M_{k+1} = M_k (1 + t)$ **(5. 7a)**

(5.b) => $N = M_1 \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$ **(5. 7b)**

(5.c) => $N\,V = A \dfrac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$ **(5. 7c)**

5.3.1.2. Emprunt obligataire remboursé au pair et par amortissements constants.

Les relations tirées du tableau synthétique, ci-dessus, deviennent, dans le cas particulier d'un emprunt obligataire remboursé au pair et par amortissements constants :

(5. a) => $N = n\,M$ **(5. 8a)**

(5. b) => $A_{k+1} = A_k - (N\,V\,t) / n$ **(5. 8b)**

Exemple 5.7. : Etablissement des tableaux de remboursement d'un emprunt obligataire remboursé au pair.

La B.N.D.E. lance un emprunt obligataire dans les conditions suivantes :

Nombre d'obligations N = 1 000 000
Valeur nominale d'une obligation V = 100 DH
Durée de l'emprunt n = 10 ans
Valeur de remboursement d'une obligation R = 100 DH
Taux d'intérêts t = 10 % l'an

Etablissez les tableaux de remboursement de cet emprunt obligataire remboursé au pair, dans le cas d'un remboursement par annuités constantes et dans le cas d'un remboursement par amortissements constants.

Remboursement par annuités constantes.

Les relations (5.7) donnent :

(5. 7a) $M_{k+1} = M_k\,(1 + t)$ $\Rightarrow M_{k+1} = 1{,}1\ M_k$

(5. 7b) $N = M_1 \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$ $\Rightarrow M_1 = 62\ 745{,}39$

(5. 7c) $NV = A \dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ $\Rightarrow A = 16\ 274\ 539{,}49$ DH

Les valeurs de M_k doivent être entières, pour ce faire nous ferons des calculs exacts et nous arrondirons, à l'unité prés ; le dernier M_n devra permettre que la somme de tous les M_k soit égale à N.

Le tableau des remboursements peut être établi :

Ans	Nombre de Titres amortis	Nombre de Titres non amortis	Montants amortis dans l'année	Intérêts payés pour l'année
0	0	1 000 000	0	
1	62 745	937 255	6 274 500	10 000 000
2	69 020	868 235	6 902 000	9 372 550
3	75 922	792 313	7 592 200	8 682 350
4	83 514	704 799	8 351 400	7 923 130
5	91 866	616 933	9 186 600	7 047 990
6	101 052	515 881	10 105 200	6 169 330
7	111 157	404 724	11 115 700	5 158 810
8	122 273	282 451	12 227 300	4 047 240
9	134 500	147 951	13 450 000	2 824 510
10	147 951	0	14 795 100	1 479 510
Total	**1 000 000**	**. . .**	**100 000 000**	**57 919 160**

Pour établir ce tableau, nous n'avons eu besoin que des relations (5.7a), (5.7b) et (5.7c) qui nous ont permis de calculer l'annuité A, le nombre de titres amortis la 1ère année, M_1 et la relation donnant $M_{k+1} = 1{,}10 \times M_k$.

L'égalité : (annuité A = Amortissement + Intérêts), permet de calculer les intérêts payés chaque année.

Remboursement par amortissements constants.

Les relations (5.8) donnent :

(5. 8a) $N = n\,M \qquad M = 100\,000$

(5. 8b) $$A_{k+1} = A_k - \frac{N\,V\,t}{n} = A_k - 1\,000\,000$$

Le tableau des remboursements peut être établi :

Ans i	Nombre de Titres amortis	Nombre de Titres non amortis	Montants amortis dans l'année	Intérêts payés pour l'année i	Montant des annuités
0		1 000 000			
1	100 000	900 000	10 000 000	10 000 000	20 000 000
2	100 000	800 000	10 000 000	9 000 000	19 000 000
3	100 000	700 000	10 000 000	8 000 000	18 000 000
4	100 000	600 000	10 000 000	7 000 000	17 000 000
5	100 000	500 000	10 000 000	6 000 000	16 000 000
6	100 000	400 000	10 000 000	5 000 000	15 000 000
7	100 000	300 000	10 000 000	4 000 000	14 000 000
8	100 000	200 000	10 000 000	3 000 000	13 000 000
9	100 000	100 000	10 000 000	2 000 000	12 000 000
10	100 000	0	10 000 000	1 000 000	11 000 000
Total	**1 000 000**	**. . .**	**100 000 000**	**55 000 000**	**155 000 000**

Pour établir ce tableau, nous n'avons eu besoin que des relations (5.8a) et (5.8b) qui nous ont permis de calculer le nombre de titres amortis chaque année, M ainsi que la valeur de l'annuité A_{k+1} en fonction de A_k.

L'amortissement annuel est constant et égal à 10 000 000 DH, quant à l'intérêt annuel il est égal à la valeur des titres non-amortis multipliée par le taux d'intérêt t.

L'égalité : (annuité A = Amortissement + Intérêts), permet le calcul des annuités, dans la colonne 6.

5.3.2. EMPRUNT OBLIGATAIRE REMBOURSE AU-DESSUS DU PAIR.

Dans ce cas, chaque titre est remboursé au-dessus de sa valeur ; soit donc R sa valeur de remboursement. ($R > V$)

Nous distinguerons, là encore, deux cas :

- Remboursement par annuités constantes ;
- Remboursement par amortissements constants.

Avant de distinguer les deux cas**,** nous nous proposons de récapituler, dans un seul tableau, les données d'un emprunt obligataire, remboursé au-dessus du pair, tel que nous les avons énoncés, plus haut.

Périodes	**Annuités**	**Titres restant en circulation**
1	$A_1 = N\ V\ t + M_1\ R$	$N_1 = N - M_1$
2	$A_2 = N_1\ V\ t + M_2\ R$	$N_2 = N_1 - M_2$
3	$A_3 = N_2\ V\ t + M_3\ R$	$N_3 = N_2 - M_3$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
n	$A_n = N_{n-1}\ V\ t + M_n\ R$	$N_n = N_{n-1} - M_n = 0$

A partir de ce tableau récapitulatif, nous pouvons écrire les relations générales suivantes :

$N_{n-1} = M_n \Rightarrow \quad A_n = M_n\ (V\ t + R) = Mn\ R\ (1 + r)$

En posant $r = (V\ t) / R$

(5.f): $A_{k+1} - A_k = M_{k+1} R - M_k R (1 + r)$

(5.g) : $N\,R = \sum_{i=1}^{i=n} A_i\,(1+r)^{-i}$

(5.h) : $N = \sum_{i=1}^{i=n} M_i$

Nous utiliserons ces relations pour étudier les deux cas :

5.3.2.1. Emprunt obligataire remboursé au-dessus du pair et par annuités constantes.

Les relations tirées du tableau synthétique, ci-dessus, deviennent, dans le cas particulier d'un emprunt obligataire remboursé au-dessus du pair et par annuités constantes :

(5.f) => $\mathbf{M_{k+1} = M_k\,(1 + r)}$ **(5. 9a)**

(5.g) => $\mathbf{N\,V = A\,\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$ **(5.9b)**

(5.h) => $\mathbf{N = M_1\,\frac{(1+r)^{n}-1}{r}}$ **(5. 9c)**

5.3.2.2. Emprunt obligataire remboursé au-dessus du pair et par amortissements constants.

Les relations tirées du tableau synthétique, ci-dessus, deviennent, dans le cas particulier d'un emprunt obligataire remboursé au-dessus du pair et par amortissements constants :

(5. f) => $\mathbf{N = n\,M}$ **(5. 10a)**

(5. g) => $\mathbf{A_{k+1} = A_k - (N\,R\,r)/n}$ **(5. 10b)**

Exemple 5.8. : Etablissement des tableaux de remboursement d'un emprunt obligataire remboursé au-dessus du pair.

Reprenons les données de l'exemple 5.7 et supposons que la valeur de remboursement d'une obligation est R = 110 DH. Nous avons ainsi un emprunt remboursé au-dessus du pair.

Etablir les tableaux de remboursement de cet emprunt obligataire remboursé au-dessus du pair, dans le cas d'un remboursement par annuités constantes et dans le cas d'un remboursement par amortissements constants.

Remboursement par annuités constantes.

Les relations (5.9) donnent puisque r = 0,09091 :

(5. 9a) $\quad M_{k+1} = M_k\,(1 + r) \qquad M_{k+1} = 1{,}09091\ \mathrm{x}M_k$

(5. 9b) $\quad N\,R = A\,\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r} \qquad A = 17\ 208\ 925{,}87$

(5. 9c) $\quad N = M_1\,\dfrac{(1+r)^{n}-1}{r} \qquad M_1 = 65\ 534{,}78$

Les valeurs de M_k doivent être entières, pour ce faire nous ferons des calculs exacts et nous arrondirons, à l'unité prés ; le dernier M_n devra permettre que la somme de tous les M_k soit égale à N.

Le tableau des remboursements peut être établi :

Ans	**Nombre de Titres amortis**	**Nombre de Titres non amortis**	**Montants amortis dans l'année**	**Intérêts payés pour l'année**
0	0	1 000 000	0	
1	65 535	934 465	7 208 850	10 000 000
2	71 493	862 972	7 864 230	9 344 650
3	77 992	784 980	8 579 120	8 629 720
4	85 082	699 898	9 359 020	7 849 800
5	92 817	607 081	10 209 870	6 998 980
6	101 255	505 826	11 138 050	6 070 810
7	110 460	395 366	12 150 600	5 058 260
8	120 502	274 864	13 255 220	3 953 660
9	131 457	143407	14 460 270	2 748 640
10	143 407	0	15 774 770	1 434 070
Total	**1 000 000**	**. . .**	**110 000 000**	

Pour établir ce tableau, nous n'avons eu besoin que des relations (5.9a), (5.9b) et (5.9c) qui nous ont permis de calculer l'annuité A, le nombre de titres amortis la 1ère année, M_1 et la relation donnant $M_{k+1} = 1{,}09091 \times M_k$ pour le calcul des différents M_k.

L'égalité : (annuité A = Amortissement + Intérêts), permet de calculer les intérêts payés chaque année.

Remboursement par amortissements constants.

Les relations (5.10) donnent :

(5. 10a) $\quad N = n\,M \quad \Rightarrow \quad M = 100\,000$

Le tableau des remboursements peut être établi :

Ans	Nombre de Titres amortis	Nombre de Titres non amortis	Montants amortis dans l'année	Intérêts payés pour l'année
0		1 000 000		
1	100 000	900 000	11 000 000	10 000 000
2	100 000	800 000	11 000 000	9 000 000
3	100 000	700 000	11 000 000	8 000 000
4	100 000	600 000	11 000 000	7 000 000
5	100 000	500 000	11 000 000	6 000 000
6	100 000	400 000	11 000 000	5 000 000
7	100 000	300 000	11 000 000	4 000 000
8	100 000	200 000	11 000 000	3 000 000
9	100 000	100 000	11 000 000	2 000 000
10	100 000	0	11 000 000	1 000 000
Total	**1 000 000**	**. . .**	**110 000 000**	**55 000 000**

Pour établir ce tableau, nous n'avons eu besoin que de la relation (5.10a) qui nous a permis de calculer le nombre de titres M, amortis chaque année.

L'amortissement annuel est constant et égal à 11 000 000 DH, quant à l'intérêt annuel il est égal à la valeur des titres non-amortis multiplié par le taux d'intérêt t.

L'égalité : annuité A = Amortissement + Intérêts, permet le calcul des annuités.

5.3.3. TAUX D'UN EMPRUNT OBLIGATAIRE.

Un emprunt obligataire peut avoir les caractéristiques suivantes :

- La valeur R de remboursement d'un titre peut être supérieure ou égale à la valeur nominale V ;
- La valeur E d'émission d'un titre peut être inférieure ou égale à la valeur nominale V ;
- L'émetteur engage des frais F pour lancer l'emprunt.

Tout ceci fait qu'on est amené à considérer différents taux pour un emprunt obligataire :

- Taux de rendement des obligataires qui prêtent ;
- Taux de revient pour l'émetteur de l'emprunt.

5.3.3.1. Taux de rendement d'un emprunt obligataire.

Le taux de rendement u, à l'émission, d'un emprunt obligataire, pour ceux qui prêtent, (les obligataires) est donné par la relation :

$$N\,E = a_1\,(1+u)^{-1} + a_2\,(1+u)^{-2} + \ldots + a_n\,(1+u)^{-n}$$

Les a_i sont les annuités de remboursement.

Dans le cas d'annuités constantes, cette relation devient :

$$\mathbf{E = a\,\frac{1-(1+u)^{-n}}{u} = R\,\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\,\frac{1-(1+u)^{-n}}{u}} \quad \mathbf{(5.\,11)}$$

Ce taux u est évidemment supérieur au taux t d'intérêts de l'emprunt.

5.3.3.2. Taux de revient d'un emprunt obligataire.

Le taux de revient v, à l'émission d'un emprunt obligataire, pour l'établissement qui émet l'emprunt, est donné par la relation :

$$N\,E - F = a_1\,(1+v)^{-1} + a_2\,(1+v)^{-2} + \ldots + a_n\,(1+v)^{-n}$$

Les a_i sont les annuités de remboursement.

Dans le cas d'annuités constantes, cette relation devient :

$$\mathbf{E - \frac{F}{N} = a\,\frac{1-(1+u)^{-n}}{u} = R\,\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\,\frac{1-(1+v)^{-n}}{v}} \quad \textbf{(5. 12)}$$

Avec r = V t / R.

Ce taux v est évidemment supérieur au taux t d'intérêts de l'emprunt.

Exemple 5.9. : Taux de rendement et de revient d'un emprunt obligataire.

Reprenons les données de l'exemple 5.7 et supposons que les valeurs d'émission et de remboursement d'une obligation sont respectivement E = 95 DH et R = 110 DH.

Calculer les taux de rendement et de revient dans le cas d'un remboursement par annuités constantes. On suppose que l'émetteur a payé 1 500 000 DH de frais de publicité et d'organisation.

En utilisant les relations (5.11) et (5.12) on trouve :

$$\frac{1-(1+u)^{-n}}{u} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\,\frac{E}{R} = 5{,}52041$$

$$\frac{1-(1+v)^{-n}}{v} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\,\frac{E - (F/N)}{R} = 5{,}43324$$

La table T4b donne pour u et v, après utilisation de la méthode d'interpolation linéaire :

u = 12,57 % et v = 12,97 %.

On voit bien que le taux réel et le taux de revient sont largement supérieurs au taux nominal de 10 %.

CHAPITRE 6 - LES INVESTISSEMENTS.

Les calculs sur les investissements d'une entreprise répondent à deux types de problèmes :

- Etudier la rentabilité d'un investissement pour répondre à la question de son opportunité ;
- Choisir entre plusieurs investissements, dans le cas où une entreprise dispose de plusieurs opportunités de projets.

Nous étudierons, dans ce chapitre, ces deux types de problèmes.

6.1. OPPORTUNITE D'UN INVESTISSEMENT.

Plusieurs raisons poussent une entreprise à investir :

- Pour renouveler ses équipements par des équipements plus modernes ;
- Pour augmenter ou diversifier sa production.

Mais pour qu'un investissement soit décidé, il est nécessaire qu'il soit rentable, c'est-à-dire que ses recettes actualisées soient supérieures aux dépenses actualisées qu'il engendre.

Considérons donc une entreprise qui étudie un investissement caractérisé par :

- Des recettes périodiques R_i ;
- Des dépenses périodiques D_i ;
- Une durée d'amortissement de n périodes ;
- Un taux d'intérêt ou d'actualisation t.

6.1.1. GAIN D'UN INVESTISSEMENT.

On définit, pour chaque projet d'investissement, le revenu total ; actualisé à la date d'aujourd'hui, ce revenu, ou gain est donné par la relation :

$M = (R_0 - D_0) + (R_1 - D_1)(1 + t)^{-1} +(R_2 - D_2) (1 + t)^{-2} + (R_3 - D_3) (1 + t)^{-3} +. . . . +(R_n - D_n) (1 + t)^{-n}$

$$\mathbf{G} = \sum_{i=0}^{i=n} (R_i - D_i) (1 + t)^{-i} \qquad \textbf{(6.1)}$$

Avec D_0 : montant de l'investissement ;
R_0 : Recette de la 1ère année ;
R_n prix de cession de l'équipement amorti.

L'investissement est rentable (opportun) si $G > 0$

Dans le cas où l'entreprise peut déterminer ses cash flow CF périodiques, relatifs à l'investissement envisagé, la relation (6.1) devient :

$$\mathbf{G} = \sum_{i=0}^{i=n} (CF_i)(1 + t)^{-i} \qquad \textbf{(6.2)}$$

On utilise habituellement pour taux d'actualisation, le taux d'intérêt du crédit, ou le taux de rentabilité de l'entreprise, en cas d'autofinancement.

Exemple 6.1. : Rentabilité d'un investissement par la méthode du signe du gain.

Un investissement de 100 000 DH engendre, sur 7 ans, des recettes de 30 000 DH / an et des dépenses de 5 000 DH / an.

Montrer, par la méthode du signe du revenu global, si cet investissement est rentable, sachant que le taux d'intérêt est égal à 10 %.

Formalisons le problème posé.

Calculer G si D_0 = 100 000 DH, R_i = 5 000 DH, D_i = 30 000 DH, n = 6 ans et t = 10 %.

Pour calculer pratiquement G, nous ferons appel au tableau :

Epoques i	**Ri**	**Di**	$(R_i - D_i)(1+t)^{-i}$
0	30 000	5 000	- 100 000,00
1	30 000	5 000	22 725,25
2	30 000	5 000	20 661,25
3	30 000	5 000	18 782,87
4	30 000	5 000	17 075,75
5	30 000	5 000	15 523,00
6	30 000	5 000	14 111,75
TOTAL			**8 881,75**

Le signe de G est positif, le projet d'investissement est donc rentable.

6.1.2. TAUX INTERNE DE RENDEMENT D'UN INVESTISSEMENT.

On définit, aussi, pour chaque investissement, un taux interne de rentabilité, noté TIR, il vérifie, selon le cas, l'une des relations :

$$\sum_{i=0}^{i=n}(R_i - D_i)(1+TIR)^{-i} = 0 \qquad (6.3)$$

ou

$$\sum_{i=0}^{i=n}(CF_i)(1+TIR)^{-i} = 0 \qquad (6.4)$$

Le TIR est le taux d'actualisation qui permet d'équilibrer le montant de l'investissement et la somme des cash flow actualisés.

Ainsi si le taux d'intérêt est t , on peut dire que :

- Si TIR > t => L'investissement est rentable ;
- Si TIR < t => L'investissement n'est pas rentable.

La signification de ce taux est très importante : elle indique le taux d'intérêt au-dessus duquel le projet n'est plus rentable. C'est donc un moyen qui permet de préparer la négociation du taux d'intérêt du crédit avec le banquier.

Exemple 6.2. : Rentabilité d'un investissement par la méthode du TIR.

Reprendre l'exemple 6.1. et montrer, par la méthode du TIR, la rentabilité du projet.

Formalisons le problème posé.

Calculer TIR si $D_0 = 100\ 000$ DH, $R_i = 5\ 000$ DH, $D_i = 30\ 000$ DH et n = 6 ans.

Pour calculer pratiquement le TIR, nous ferons appel au tableau :

Epoques i	(Ri – Di) $(1+ t)^{-i}$ t = 13 %	(Ri – Di) $(1+ t)^{-i}$ t = 13,05 %	(Ri – Di) $(1+ t)^{-i}$ t = 13,01 %
0	- 100 000,00	- 100 000,00	- 100 000,00
1	22 123,89	22 114,00	22 122,00
2	19 578,75	19 561,25	19 575,25
3	17 326,25	17 303,25	17 321,75
4	15 333,00	15 306,00	15 327,50
5	13 569,00	13 539,00	13 563,00
6	12 008,00	11 979,00	12 001,50
TOTAL	**61,11**	**- 197,50**	**- 89,00**

Ce tableau montre que le TIR est compris entre 13 et 13,01 % et qu'il est très proche de 13 %, ce qui est une très bonne approximation.

Ainsi si le taux d'intérêt est inférieur à 13 %, le projet est rentable, dans le cas contraire, il faut l'abandonner.

6.1.3. DELAI DE RECUPERATION DU MONTANT INVESTI.

On définit, encore, pour un investissement le délai de récupération DR qui donne le temps qu'il faut à l'entreprise pour récupérer l'intégralité des sommes investies pour réaliser son projet.

En considérant les relations (6.1) et (6.2), le délai de récupération, mesuré en années, est donné par les relations :

$$\sum_{i=0}^{i=n}(R_i - D_i)(1+t)^{-i} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{i=n}(CF_i)(1+t)^{-i} = 0$$

Relations dans lesquelles il s'agit de déterminer n en années et mois.

L'intérêt de l'utilisation du concept de délai de récupération permet une gestion pointue de la trésorerie de l'entreprise si tel est sa priorité.

Ainsi, selon les préoccupations de l'entreprise, c'est tel concept plutôt qu'un autre qui prévaudra, dans la détermination de l'opportunité d'un investissement, à savoir :

- Si les taux d'intérêt et le délai d'amortissement de l'investissement sont fixés, il est conseillé de se servir du concept de gain ou de celui du TIR pour décider de l'opportunité de l'investissement ;
- Si la gestion de trésorerie est primordiale, il est recommandé d'user du concept du délai de récupération du montant engagé pour l'investissement ;
- Si, par contre le taux d'intérêt reste à discuter, l'utilisation du concept du TIR permet de connaître l'opportunité d'un investissement, compte-tenu des résultats des négociations avec le banquier, relativement au taux d'intérêt du crédit.

Exemple 6.3. : Rentabilité d'un investissement par la méthode du délai de récupération.

Reprendre l'exemple 6.1. et déterminer par la méthode du Délai de Récupération, DR si le projet est rentable.

Formalisons le problème posé.

Calculer DR si D_0 = 100 000 DH, R_i = 5 000 DH, D_i = 30 000 DH, n = 6 ans et t = 10 %.

Pour calculer pratiquement DR, nous ferons appel au tableau :

Epoques i	**(Ri – Di) $(1 + t)^{-i}$** **t = 10 %**	**(Ri – Di) $(1 + t)^{-i}$** **t = 10 %**
0	- 100 000,00	- 100 000,00
1	22 725,25	22 725,25
2	20 661,25	20 661,25
3	18 782,75	18 782,75
4	17 075,75	17 075,75
5	15 523,00	15 523,00
et 2 mois	4 101,04	- - -
et 3 mois	- - -	6 102,91
Total	**- 1130,97**	**2 840,87**

Les calculs pour les cases 5 ans et n mois doivent être explicités, nous allons le faire pour 5 ans et 2 mois et pour 5 ans et 3 mois ; en effet :

On doit, d'abord calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10 %.

La table T3 donne t_m = 0,797 % pour t = 10 %.

Ensuite, nous supposerons que les dépenses et recettes sont réparties de façon homogène sur l'année, à savoir que pour 2 mois : r_i = 5 000 DH et d_i = 833,33 DH.

Enfin, nous calculons $(r_i - d_i)(1 + t_m)^{-2}$ = 4 101,04 DH.

Pour 3 mois, ri = 7 500 DH di = 1 250 DH, ce qui donne :
$(r_i - d_i)(1 + t_m)^{-3}$ = 6 102,91 DH.

Ce tableau montre que DR est compris entre 5 ans et 2 mois et 5 ans et 3 mois. La société devra décider de l'opportunité de l'investissement, en fonction de sa future trésorerie.

Remarque 1 : La simplicité des calculs de ces 3 exemples n'enlève rien à leur intérêt. Nous avons, à juste titre, jugé qu'il était inutile de les compliquer.

6.2. CHOIX ENTRE INVESTISSEMENTS.

Lorsqu'une entreprise dispose de plusieurs projets alternatifs pour réaliser le renouvellement de ses équipements, l'augmentation ou diversification de sa production, elle doit choisir entre ces différents investissements.

Pour ce faire, plusieurs méthodes s'offrent à elle :

- Comparaison entre les TIR des différents projets et opter pour le projet qui a le plus fort TIR ;
- Comparaison entre les gains des différents projets et opter pour le projet qui à le plus grand gain ;
- Comparaison des délais de récupération DR des différents projets et choisir celui qui a le plus court délai DR.

Ces trois critères de choix ne sont pas toujours cohérents, en effet, on pourra, lors d'un choix entre deux projets, avoir un critère qui plaide pour un projet et un autre critère qui plaide pour l'autre projet.

Que faire dans ces cas ?

En général, on privilégie le critère relatif au TIR.

Exemple 6.4. : Choix d'investissement.

On considère deux investissements qui engendrent les recettes et les dépenses annuelles suivantes :

1er investissement de 240 000 DH sur 4 ans :

Tableau 6.4.a

Epoque i	***1***	***2***	***3***	***4***
Recettes	*100 000*	*120 000*	*100 000*	*110 000*
Dépenses	*25 000*	*27 000*	*30 000*	*47 000*

2ème investissement de 265 000 DH sur 5 ans :

Tableau 6.4.b

Epoque i	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Recettes	*100 000*	*100 000*	*110 000*	*110 000*	*100 000*
Dépense	*20 000*	*30 000*	*35 000*	*40 000*	*50 000*

Quel investissement choisir et quel critère appliquer pour ce faire, sachant que le taux d'intérêt est 9 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer G, DR et TIR si :

- Projet 1 : voir tableau 6.4.a ;
- Projet 2 : voir tableau 6.4.b.

Dressons, pour cela les tableaux de calcul de G, pour les deux projets.

Investissement 1 :

Epoques i	**R_i**	**D_i**	**$(R_i - D_i) (1 + t)^{-i}$**
0		240 000	- 240 000,00
1	100 000	25 000	68 807,34
2	120 000	27 000	78 276,24
3	100 000	30 000	54 052,84
4	110 000	47 000	44 630,79
TOTAL G			**5767,21**

Investissement 2 :

Epoques i	**R_i**	**D_i**	**$(R_i - D_i) (1 + t)^{-i}$**
0		265 000	- 265 000,00
1	100 000	20 000	73 394,50
2	100 000	30 000	58 917,60
3	110 000	35 000	57 913,76
4	110 000	40 000	49 589,76
5	100 000	50 000	32 496,57
TOTAL G			**7 312,19**

Comme on le voit, les deux projets sont rentables, mais le 2ème projet est plus rentable que le 1er.

Dressons, maintenant les tableaux de calcul des TIR des deux projets :

Investissement 1 :

Epoques i	**(Ri – Di) (1+ t)$^{-i}$ t = 11 %**	**(Ri – Di) (1+ t)$^{-i}$ t = 10,75 %**	**(Ri – Di) (1+ t)$^{-i}$ t = 10,65 %**
0	- 240 000,00	- 240 000,00	- 240 000,00
1	67 567,58	67 720,09	67 781,29
2	75 480,89	75 822,04	75 959,15
3	51 183,40	51 530,79	51 670,63
4	44 134,98	44 534,84	44 696,05
TOTAL	**- 1633,15**	**- 392,24**	**107,12**

Investissement 2 :

Epoques i	**(Ri – Di) (1 + t)$^{-i}$ t = 10 %**	**(Ri – Di) (1 + t)$^{-i}$ t = 10,25 %**	**(Ri – Di) (1 + t)$^{-i}$ t = 10,10 %**
0	- 265 000,00	- 265 000,00	- 265 000,00
1	72 727,27	72 562,36	72 661,22
2	57 851,24	57 589,17	57 746,20
3	56 348,61	55 966,15	56 195,21
4	47810,94	47 378,76	47 637,48
5	31 046,07	30 695,66	30 905,33
TOTAL	**784,13**	**- 807,90**	**- 145,44**

Nous pouvons calculer, par interpolation, les TIR des deux projets ; en effet :

- Pour le projet 1 :

Δ G = 392,24 + 107,12 = 499,36

Δ t = 10,75 % - 10,65 % = 0,10 %

Donc si Δ G = 107,12 alors Δ t = 0,10 % x 107,12 / 499,36
= 0,02 %

Ce qui donne pour TIR_1 = 10,67 %

- Pour le projet 2 :

ΔG = 784,13 + 145,44 = 929,57 donc Δt = 10,10 % - 10 % = 0,10 %

Si ΔG = - 145,44 alors $\Delta t = \frac{-0{,}10 \text{ x } 145{,}44}{929{,}57}$

= - 0,0160 %

Ce qui donne pour TIR_2 = 10, 02%

Comme on le voit, le projet 1 est plus rentable que le projet 2, au vue du TIR.

Voyons, maintenant, les délais de récupération DR des deux projets. Pour ce faire, nous travaillerons avec le taux d'intérêt de l'énoncé, à savoir 9 %.

Au vue des tableaux de calcul des revenus des deux investissements, nous avons :

- Pour le projet 1 : 3 ans < DR_1 < 4 ans

- Pour le projet 2 : 4 ans < DR_2 < 5 ans

Comme on le voit, le projet 1 a un délai de récupération plus court que le projet 2, il est donc plus intéressant.

Nous pouvons, à ce niveau, discuter le choix entre les deux investissements.

1 - Au vue des revenus globaux dégagés, le 2ème projet semble légèrement plus intéressant que le 1er ;
2 - Au vue des TIR, le 1er projet est plus rentable que le 2ème ;
3 - Au vue des DR, le 1er projet est plus rapidement rentable.

Nous pouvons donc choisir, sans hésitation, le 1er projet.

Remarque 2 : Tous les exemples que nous avons donnés, dans ce chapitre, peuvent faire l'objet de quelques mauvaises interprétations, en ce sens que nous avons toujours fait payer l'investissement, à la date d'origine, comme s'il s'agissait d'un autofinancement.

Ceci n'est qu'une apparence ; en effet, même si l'on suppose que l'investissement est financé, en totalité, par un crédit bancaire, remboursable en un certain nombre d'annuités, on aura toujours à la date d'origine pour valeur d'investissement, la valeur actuelle de la somme des annuités actualisées. Nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 6.5. : Choix d'investissements.

Une entreprise décide d'augmenter sa production par l'acquisition de nouvelles machines.

Deux types de machines sont disponibles sur le marché, aux prix et conditions suivantes.

1er type de machines : Prix payable en 15 mensualités de 92 000 DH chacune. Ce type de machines permet des recettes annuelles de 570 000 DH moyennant des dépenses annuelles de 200 000 DH.

2ème type de machines : Prix payable en 10 mensualités de 115 000 DH chacune. Ce type de machines permet des recettes annuelles de 410 000 DH moyennant des dépenses annuelles de 100 000 DH.

Quel type de machines doit choisir l'entreprise si le taux d'actualisation est de 11 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer le gain G et le TIR pour les deux types de machines si t = 11 %.

Calculons, d'abord, pour les deux types de machines, la valeur actuelle de leur investissement.

La relation (4.1) donne : $Va = a\ \dfrac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m}$

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11 % est donné par la table T3 : t_m = 0,873 % :

Ainsi : $Va_1 = 92\,000 \times \dfrac{1-(1{,}00873)^{-15}}{0{,}00873} = 1\,288\,207{,}41$ DH

Et : $Va_2 = 115\,000 \times \dfrac{1-(1{,}00873)^{-10}}{0{,}00873} = 1\,096\,672{,}88$ DH

A ce niveau, tout revient comme si l'investissement, pour chaque type de machines, se fait, à la date d'aujourd'hui, à leur valeur actuelle.

Pour calculer les gains G relatifs aux deux types de machines, nous dressons les tableaux suivants :

Investissement type 1 :

Epoques i	**Ri**	**Di**	**(Ri-Di) (1+t)$^{-i}$**
0		1 288 207,41	- 1 288 207,41
1	570 000,00	200 000,00	333 333,33
2	570 000,00	200 000,00	300 300,30
3	570 000,00	200 000,00	270 540,81
4	570 000,00	200 000,00	243 730,46
5	570 000,00	200 000,00	219 576,99
TOTAL Gain G_1			**79 274,48**

Investissement type 2 :

Epoques i	Ri	Di	(Ri-Di) (1+t)$^{-i}$
0		1 096 672,88	- 1 096 657,53
1	410 000,00	100 000,00	279 279,28
2	410 000,00	100 000,00	251 602,95
3	410 000,00	100 000,00	226 669,33
4	410 000,00	100 000,00	204 206,60
5	410 000,00	100 000,00	183,696,91
TOTAL Gain G_2			**49 070,54**

Pour le calcul des TIR des deux types d'investissements, nous dressons les deux tableaux suivants :

Investissement type 1 : calcul de (Ri – Di) (1 + t)$^{-i}$

Epoques i	t = 13,4 %	t = 13,42 %	t = 13,5 %
0	- 1 288 207,41	- 1 288 207,41	- 1 288 207,41
1	326 278,66	326 221,13	325 991,19
2	287 723,69	297 622,22	287 216,91
3	253 151,59	253 590,39	253 054,54
4	223 451,03	223 585,25	222 955,55
5	197 304,26	197 130,36	196 436,60
TOTAL	**566,82**	- 58,06	**- 2 552,62**

On trouve donc t = 13,42 %.

Investissement type 2 : calcul de (Ri – Di) (1 + t)$^{-i}$

Epoques i	**t = 13 %**	**12,7 %**	**12,8 %**
1	- 1 096 657,53	- 1 096 657,53	- 1 096 657,53
2	274 336,28	275 066,55	274 822,70
3	242 775,42	244 069,70	243 637,14
4	214 845,56	216 565,84	215 990,37
5	190 128,81	192 161,34	191 480,83
	168 255,58	170 506,96	169 752,51
TOTAL	**- 6 315,88**	**1 712,46**	**- 973,98**

On trouve, après extrapolation t = 12,75 %

Le projet 1 est plus rentable que le projet 2 et ceci tant du point de vue du gain que de celui du TIR.

PARTIE 4 - CAS D’APPLICATIONS.

Avant de présenter un ensemble d’exercices d’application et d’études de cas, il nous a semblé utile, au préalable, d’expliciter la méthode que nous conseillons d’adopter pour résoudre un problème de mathématiques financières.

CHAPITRE 7 – METHODE DE RESOLUTION DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES.

Tout problème de mathématiques financières se résout par l’application judicieuse des formules qui jalonnent ce livre.

Les questions qui se posent sont : Quelles formules utiliser et comment les appliquer ?

Pour ce faire, nous nous sommes astreints, tout au long de ce livre, à travers tous les exemples d’illustration que nos avons donnés, de formaliser le problème posé, juste après son énoncé. Cette formalisation qui respecte le symbolisme adopté, montre, après que la résolution du problème, devient un simple jeu d’écriture, pour remplacer chaque variable par sa valeur.

Sans cette formalisation, il s’avère difficile de bien appliquer la formule, voire de trouver la bonne formule.

Le 1er effort consiste donc à trouver la relation idoine à appliquer.

Pour ce faire, nous proposons, dans ce qui suit, pour mémoire, une synthèse de toutes les relations établies ci-dessus.

Mais l'effort, pour résoudre un problème de mathématiques financières ne s'arrête pas là, il y a deux points sur lesquels il est nécessaire de revenir, à savoir, l'utilisation de la fonction logarithme et l'utilisation des tables financières par la méthode d'interpolation linéaire.

7.1. FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES FINANCIERES.

Nous donnons, dans ce qui suit, les formulaires regroupant les relations rencontrées, tout au long de ce livre, partie après partie.

7.1.1. FORMULES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES A COURT TERME.

Mathématiques financières	Formules	Explication des variables
A court terme	**Intérêt simple :** $I = \frac{C\ t\ T}{100}$	I : intérêts ; C : capital placé, pendant T périodes ; t : taux d'intérêt périodique ; T : nombre de périodes.
	$I = \frac{C\ t\ n}{36\ 000}$	I : intérêts ; C : capital placé, pendant n jours ; t : taux d'intérêt annuel ; n : nombre de jours.
	$I = \frac{C\ t\ m}{1\ 200}$	I : intérêts ; C : Capital placé, pendant m mois ; t : taux d'intérêt annuel ; m : nombre de mois.
	Valeur acquise : $VA = C + I$	VA : valeur acquise ; C : capital placé ; I : intérêts produits.

7.1.2. FORMULES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES A MOYEN ET LONG TERME.

Mathématiques financières	Formules	Explication des variables
A moyen et long termes: intérêts composés	**Valeur acquise** $VA = C\ (1 + t)^{n}$	VA : valeur acquise ; C : capital placé, pendant n périodes ; t : taux d'intérêt périodique ; n : nombre de périodes.
	Intérêt produit $I = VA - C$	Va : valeur acquise ; C : capital placé, pendant n périodes.
	Valeur actuelle $Va = C\ (1 + t)^{-n}$	Va : valeur actuelle ; C : valeur du capital, n périodes, après ; t : taux d'actualisation périodique ; n : nombre de périodes.
A moyen et long termes : Annuités de fin de périodes.	**Valeur actuelle** $Va = a\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ **Valeur acquise** $VA = a\dfrac{(1+t)^{n}-1}{t}$	Va : valeur actuelle ; VA : valeur acquise ; a : valeur de l'annuité ; t : taux d'intérêt périodique ; n : nombre d'annuités.

Mathématiques financières	Formules	Explication des variables
A moyen et long termes: Annuités de début de périodes.	**Valeur actuelle** $Va = a\,(1+t)\,\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ **Valeur acquise** $VA = a\,(1+t)\,\dfrac{(1+t)^{n}-1}{t}$	Va : valeur actuelle ; VA : valeur acquise ; a : valeur de l'annuité ; t : taux d'intérêt périodique ; n : nombre d'annuités.

7.1.3. FORMULES DE MATHEMATIQUES FINANCIERES APPROFONDIES.

Mathématiques financières	Formules	Explication des variables
A moyen et long termes : Emprunts indivis.	**Remboursement par annuités constantes** $a = C\,\dfrac{t}{1-(1+t)^{-1}}$ **Remboursement par amortissements constants** $m = C / n$ $a_k = [\, m + t\,(-km)\,]$	C : valeur du capital; a : valeur de l'annuité ; m : valeur d'amortissement t : taux d'intérêt périodique ; n : nombre d'annuités. a_k : valeur de l'annuité de rang k

Mathématiques financières	Formules	Explication des variables
A moyen et long termes : Emprunts obligataires au pair.	**Remboursement par annuités constantes** $M_{k+1} = (1+t)\ M_k$ $N = M_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$ $N\ V = A \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ **Remboursement par amortissements constants** N = n M $A_{k+1} = A_k - (N\ V\ t) / n$	N : nombre de titres émis ; V : valeur d'un titre à l'émission; M_i : nombre de titres amortis au ième tirage ; A_k : kème annuité t : taux d'intérêts annuel ; n : nombre d'années.
A moyen et long termes : Emprunts obligataires au-dessus du pair.	**Remboursement par annuités constantes** $M_{k+1} = (1+r)\ M_k$ $N = M_1 \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ $N\ V = A \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ **Remboursement par amortissements constants** N = n M $A_{k+1} = A_k - (N\ V\ r) / n$	N : nombre de titres émis ; V : valeur d'un titre à l'émission ; R : valeur d'un titre au remboursement ; M_i : nombre de titres amortis au ième tirage ; A_k : kème annuité t : taux d'intérêts annuel ; n : nombre d'années. R = (V t) / R

7.2. FONCTION LOGARITHME.

La fonction logarithme y = Log x ou log x est une fonction définie pour tout x > 0 (strictement positif), croissante de moins l'infini à plus l'infini, lorsque x varie de 0 vers plus l'infini.

Les règles de calcul, souvent utilisées, de cette fonction sont :

$$\textbf{Log a b = log a + log b} \qquad \textbf{(7.1)}$$
$$\textbf{Log a / b = log a – log b} \qquad \textbf{(7.2)}$$
$$\textbf{Log } \mathbf{a^n} \textbf{ = n log a} \qquad \textbf{(7.3)}$$

Il existe des tables de logarithme, comme il existe des tables financières. Il existe aussi des calculettes qui disposent de la fonction log et de son inverse, la fonction exponentielle.

Exemple 7.1. : Calcul du nombre d'annuités.
Un emprunt de 97 687,58 Dh est remboursé par annuités constantes de 2 500 DH mensualités. En combien de mensualités est-il remboursé si le taux d'intérêts est 11 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si C = 97 687,58 DH, t = 11 % et a = 2 500 DH.

Calculons d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11 %.
La table T3 donne t_m = 0,873 %

La relation (5.1) donne :

$$a = C\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} \qquad (1+t_m)^{-n} = 1 - Ct_m / a$$

En utilisant la fonction logarithme :

$n \log (1 + t_m) = - \log (1 – Ct_m / a)$

$n = [- \log (1 – Ct_m / a)] / \log (1 + t_m) = 48$ mois.

Exemple 7.2. : Calcul du nombre de mois de découvert.
Ali a un compte bancaire dont le solde est débiteur de 11 271,37 DH. Après combien de mois ce solde devient-il égal à 13 101,52 DH si le taux d'intérêt est 11,20 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si C = 11 271,37 DH, VA = 13 101,52 DH et t = 11,20 %.
Calculons d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11,20 %.
La table T3 donne $t_m = 0,889$ %

La relation (3 .1) donne :

$VA = C (1+t)^n$

$n = [\log (VA / C)] / \log (1 + t) = 17$ mois

7.3. METHODE D'INTERPOLATION.

L'utilisation des tables financières ne permet pas toujours de trouver le résultat exact car, des fois, celui-ci se trouve entre deux valeurs de la table.

La méthode d'interpolation linéaire permet, justement, de trouver une valeur approchée du résultat cherché.

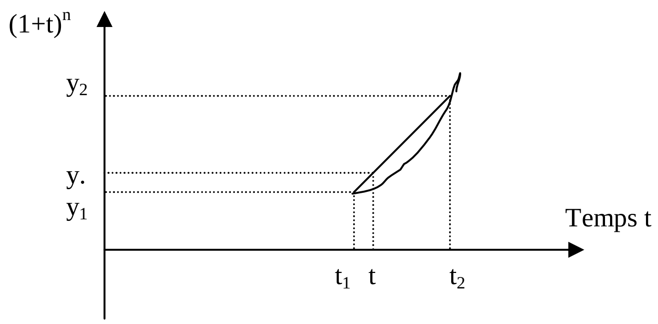
Prenons le cas de la table T1b et supposons que l'on veuille trouver les taux d'intérêt t pour n = 7 tel que $(1 + t)^7 = 1{,}727$

Après consultation de la table T1b, on constate que :

$y_1 = (1 + 0{,}081)^7 = 1{,}72496$ avec $t_1 = 8{,}1$ %
$y_2 = (1 + 0{,}082)^7 = 1{,}73616$ avec $t_2 = 8{,}2$ %

Ainsi t est compris entre 8,1 % et 8,2 %

Pour appliquer la méthode d'interpolation linéaire, on assimile la courbe à sa corde :



Pour trouver la valeur de t qui correspond à $(1 + t)^7 = 1{,}727$ on remplace la courbe par sa corde et l'on calcule t par la relation :

$$\frac{t - t_1}{y - y_1} = \frac{t_2 - t_1}{y_2 - y_1}$$

C'est là la formule de l'extrapolation ; elle est plutôt utilisée sous la forme qui permet de calculer t en fonction des autres variables :

$$\mathbf{t = t_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \times (t_2 - t_1)} \qquad \textbf{(7.4)}$$

On trouve dans l'exemple précité

$$t = 8{,}1\,\% + \frac{1{,}727 - 1{,}724496}{1{,}73616 - 1{,}72496} \text{ x } 0{,}1\,\% = 8{,}1182\,\%$$

On peut vérifier que ce résultat est bon, en effet :

$(1 + t)^7 = (1 + 0{,}081182)^7 = 1{,}726997$, ce qui est presque le 1,727 cherché.

Nous avons utiliser, à maintes reprises cette formule, tout au long de ce livre.

Nous pouvons, maintenant, inviter le lecteur à s'entraîner, dans le prochain chapitre, à la résolution de problèmes de mathématiques financières.

CHAPITRE 8 – EXERCICES D'APPLICATION.

Ce chapitre sera, exclusivement, réservé à des exercices d'application relatifs à toutes les parties du livre. Ces exercices seront donnés avec des solutions explicitées, selon notre méthode qui consiste d'abord à formaliser le problème posé avant d'appliquer les relations rencontrées dans les différents chapitres.

8.1. EXERCICES RELATIFS A LA PARTIE 1.

MATHEMATIQUES FINANCIERES A COURT TERME.

Exercice 8.1.1. : Calcul de l'intérêt produit par un capital.

Un capital de 12 525,00 DH est placé du 25/03 au 15/07 de la même année, à un taux de 9,25 % l'an ; quel est l'intérêt produit par ce capital ?

Formalisons le problème posé.

Calculer I si C = 12 525,00 DH, t = 9,25 % et n = x jours.

Calculons, d'abord le nombre de jours entre le 25/03 et le 15/07 : soit n = 6 + 30 + 31 + 30 + 15 = 112 jours.

L'utilisation de la relation (1.4) donne :

$$I = \frac{C\ t\ n}{36\ 000} = \frac{12\ 525{,}00 \times 9{,}25 \times 112}{36\ 000} = 360{,}44 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.2. : Calcul de l'intérêt produit par un capital.

Un compte sur carnet a, pour solde, au 31/10, la somme de 25 276,36 DH, quel intérêt produit-il durant les trois mois à venir si le taux d'intérêt est 6 % l'an et que le taux de l'impôt libératoire est de 30 % ?

Formalisons le problème posé.
Calculer I si C = 25 276,36 DH, t = 6 % et m = 3 mois.

Avec un prélèvement fiscal de 30 %
L'utilisation de la relation (1.3) donne :

$$\text{I avant impôt} = \frac{\text{C t m}}{1\,200} = \frac{25\,276{,}36 \times 6 \times 3}{1\,200} = 379{,}15 \text{ DH}$$

I après impôt = 0,70 x 379,15 = 265,41 DH

Exercice 8.1.3. : Calcul de l'intérêt exigé pour un découvert.

Un compte bancaire sur chèque a, pour solde débiteur, au 28/02, le montant de 32 576,87 DH, le taux d'intérêt du découvert est de 11,25 % l'an ; quel est l'intérêt que doit payer le détenteur de ce compte si le découvert reste inchangé jusqu'au 30/04 de la même année ?

Formalisons le problème posé.
Calculer I si C = 32 576,87 DH, t = 11,25 % et n = x jours.

Calculons, d'abord le nombre de jours entre le 28/02 et le 30/04 : soit n = 31 + 30 = 61 jours.
L'utilisation de la relation (1.4) donne :

$$\text{I} = \frac{\text{C t n}}{36\,000} = \frac{32\,576{,}87 \times 11{,}25 \times 61}{36\,000} = 621{,}00 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.4. : Calcul du taux d'intérêt.

Un capital de 52 350,00 DH est placé, pendant 75 jours ; quel est son taux de son placement si les intérêts produits sont de 1063,36 DH ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si C = 52 350,00 DH, I = 1063,36 DH et n = 75 jours.

L'utilisation de la relation (1.4) donne :

$$t = \frac{36\,000 \times I}{C\ n} = \frac{36\,000 \times 1\,063{,}36}{52\,350 \times 75} = 9{,}75\ \%$$

Exercice 8.1.5. : Calcul du taux d'intérêt.

Un compte sur carnet ayant, pour solde 60 000,00 DH, produit, en 4 mois, 1 257,60 DH d'intérêts bruts (avant impôts) ; quel est le taux d'intérêt sur carnet ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si C = 1 257,60 DH, I = 60 000,00 DH et m = 4 mois.

L'utilisation de la relation (1.3) donne :

$$t = \frac{1\,200 \times I}{C\ m} = \frac{1\,200 \times 1\,257{,}60}{60\,000 \times 4} = 6{,}29\ \%$$

Exercice 8.1.6. : Calcul du taux d'intérêt.

Un capital de 5 700,00 DH placé, pendant 135 jours, acquiert une valeur de 5 943,60 DH ; quel est le taux de son placement ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si C = 5 700,00 DH, VA = 5 943,60 DH et n = 135 jours.

L'utilisation de la relation (1.7) :

$$VA = C + \frac{C\ t\ n}{36\ 000} \quad \text{donne :}$$

$$t = \frac{36\ 000 \times (\ VA - C\ )}{C\ n} = \frac{36\ 000 \times (\ 5\ 943{,}60 - 5\ 700{,}00\ )}{5\ 700{,}00 \times 135} = 11{,}40\%$$

Exercice 8.1.7. : Calcul du taux d'intérêt.

Un compte sur chèque a, pour solde débiteur, au 31/03, 19 325,36 DH ; quel est le taux d'intérêt du découvert si ce solde devient égal, au 30/04, à 19 505,51 et que le compte n'ait pas été mouvementé ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si C = 19 325,36 DH, VA = 19 505,51 DH et n = x jours.

Calculons, d'abord le nombre de jours compris entre le 31/03 et le 30/04 ; soit n = 30 jours

L'utilisation de la relation (1.7) :

$$VA = C + \frac{C\ t\ n}{36\ 000} \quad \text{donne :}$$

$$t = \frac{36\ 000 \times (\ VA - C\ )}{C\ n} = \frac{36\ 000 \times (\ 19\ 505{,}51 - 19\ 325{,}36\ )}{19\ 325{,}36 \times 30}$$

$= 11{,}19\ \%$

Exercice 8.1.8. : Calcul d'un capital placé.

Un capital, placé à 11 % l'an, rapporte, en 36 jours, des intérêts de 1 378,85 DH, Quel est le montant de ce capital ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C si t = 11 %, n = 36 jours et I = 1 378,85 DH.

La relation (1.4) donne :

$$C = \frac{36\,000 \times I}{t\ n} = \frac{36\,000 \times 1\,378{,}85}{11 \times 36} = 125\,350{,}00 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.9. : Calcul d'un capital placé.

Un compte sur carnet voit son solde augmenter de 1 155,00 DH, en un trimestre. Quel est son solde, à l'origine, si l'on suppose que le taux d'intérêt, sur carnet, est de 6 % et que le prélèvement fiscal est de 30 % ?.

Formalisons le problème posé.

Calculer C si t = 11 %, n = 36 jours et I = 1 378,85 DH, avec un prélèvement fiscal de 30 %.

Calculons, d'abord le montant brut (avant impôts) des intérêts ; soit I,

I = 1 155 / 0,70 = 1 650,00 DH

La relation (1.3) donne :

$$C = \frac{1\,200 \times I}{t\ n} = \frac{1\,200 \times 1\,650{,}00}{6 \times 3} = 110\,000{,}00 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.10. : Calcul d'un capital placé.

Un compte chèque a un solde débiteur, au 15/03 ; sachant que le taux d'intérêt du découvert bancaire est de 11,25 %, le solde débiteur devient égal à 12 352,36 DH, le 31/03 ; quel est le montant du solde débiteur, au 15/03 ?

Formalisons le problème posé.
Calculer C si t = 11,25 %, n = 16 jours et VA = 12 352,36 DH.

La relation (1.7) donne :

$$VA = C + \frac{C\ t\ n}{36\ 000} \quad \text{donne :}$$

$$C = \frac{36\ 000 \times VA}{36\ 000 + t\ n} = \frac{36\ 000 \times 12\ 352{,}36}{36\ 000 + 11{,}25 \times 16} = 12\ 290{,}91\ \text{DH}$$

Exercice 8.1.11. : Calcul d'un capital placé.
Un capital acquiert une valeur de 12 500,00 DH, au bout de 75 jours de placement, à un taux de 9,25 %. Quel est le montant de ce capital ?

Formalisons le problème posé.
Calculer C si t = 9,25 %, n = 75 jours et VA = 12 500,00 DH.

La relation (1.7) donne :

$$VA = C + \frac{C\ t\ n}{36\ 000} \quad \text{donne :}$$

$$C = \frac{36\ 000 \times VA}{36\ 000 + t\ n} = \frac{36\ 000 \times 12\ 500{,}00}{36\ 000 + 9{,}25 \times 75} = 12\ 269{,}94\ \text{DH}$$

Exercice 8.1.12. : Calcul de la durée de placement.
Un compte sur carnet voit son solde passer de 12 350,56 DH à 12 856,95 DH. Combien de temps s'est écoulés entre les deux soldes, si le taux d'intérêts sur carnet est de 7,50 % et que le taux de prélèvement fiscal est de 30 % ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si C = 12 350,56 DH, VA = 12 856,95 DH et t = 7,50 %.

Avec un prélèvement fiscal de 30 %

Calculons d'abord le montant des intérêts I, après et avant impôts :

I après impôts = 12 856,95 – 12 350,56 = 506,39 DH.

I avant impôts = 506,39 / 0,70 = 723,41.

La relation (1.4) donne :

$$n = \frac{36\ 000 \times I}{C\ t} = \frac{36\ 000 \times 723{,}41}{12\ 350{,}56 \times 7{,}50} = 282 \text{ jours}$$

Nous avons arrondi le résultat au nombre juste supérieur, du fait qu'il s'agit de jours qui ne peuvent être comptés que par nombres entiers.

Exercice 8.1.13. : Calcul de la durée de placement.

Un compte chèque voit son solde débiteur passer de 10 520,35 DH à 11 250,58 DH. Combien de temps s'est écoulé entre les deux soldes, si le taux d'intérêts du découvert bancaire est de 11,50 % l'an ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si C = 10 520,35 DH, VA = 11 250,58 DH et t = 11,50 %.

La relation (1.7) donne :

$$VA = C + \frac{C\ t\ n}{36\ 000} \text{ donne :}$$

$$n = \frac{36\ 000\ (VA - C)}{C\ t} = \frac{36\ 000 \times 730{,}23}{10\ 520{,}35 \times 11{,}50} = 218 \text{ jours}$$

Nous avons arrondi le résultat au nombre entier juste supérieur, du fait qu'il s'agit de jours qui ne peuvent être comptés que par nombres entiers.

Exercice 8.1.14. : Calcul de la durée de placement.

En combien de temps, un capital de 15 750,00 DH peut-il produire 378,00 DH d'intérêts, si le taux d'intérêts est 12 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si C = 15 750,00 DH, I = 378,00 DH et t = 12 %.

La relation (1.4) donne :

$$n = \frac{36\ 000 \times I}{C\ t} = \frac{36\ 000 \times 378{,}00}{15\ 750{,}00 \times 12} = 72 \text{ jours}$$

Exercice 8.1.15. : Calcul du taux moyen de placement.

Deux capitaux de 5 500 DH et 6 500 DH sont placés, respectivement, pendant 15 et 25 jours, aux taux de 10 et 9 %.

Quel est le taux moyen de placement des deux capitaux ?

A quel taux doit être placé un capital de 12 000 DH, pendant 20 jours pour qu'il produise le même intérêt que les deux capitaux ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t_{moy} si C_1 = 5 500 DH, t_1 = 10 %, n_1 = 15 jours, C_2 = 6 500 DH, t_2 = 9 % et n_2 = 25 jours.

Calculer t si, en plus, C = 12 000 DH et n = 20 jours.

La relation (1.9b) donne :

$$\text{tmoy} = \frac{C_1\ t_1\ n_1 + C_2\ t_2\ n_2}{C_1\ n_1 + C_2\ n_2} = \frac{5\,500 \times 10 \times 15 + 6\,500 \times 9 \times 25}{5\,500 \times 15 + 6\,500 \times 25}$$

$= 9{,}34\ \%$

La relation (1.4) donne pour C : $I = \dfrac{C\ t\ n}{36\,000}$

Et pour C1 et C2 : $I = \dfrac{C_1\ t_1\ n_1}{36\,000} + \dfrac{C_2\ t_2\ n_2}{36\,000}$

De l'égalité des intérêts, on peut déduire :

$C\ t\ n = C_1\ t_1\ n_1 + C_2\ t_2\ n_2$

Ce qui donne pour t :

$$t = \frac{C_1\ t_1\ n_1 + C_2\ t_2\ n_2}{C\ n} = \frac{5\,500 \times 10 \times 15 + 6\,500 \times 9 \times 25}{12\,000 \times 20}$$

$= 9{,}53\ \%$

Exercice 8.1.16. : Calcul de l'escompte d'un effet.

Un effet d'une valeur nominale de 11 250,56 DH est escompté le 12/05 ; combien doit-on compter d'escompte si la date d'échéance est le 25/07 de la même année et que le taux d'escompte est de 9 % l'an ?

Formalisons le problème posé.

Calculer E si V = 11 250,00 DH, t = 9 % et n = x jours.

Calculons, d'abord le nombre de jours entre le 12/05 et le 25/07 ; soit n = 19 + 30 + 25 = 74 jours.

La relation (2.3) donne :

$$E = \frac{V\ t\ n}{36\ 000} = \frac{11\ 250{,}00 \quad \times 9 \times 74}{36\ 000} = 208{,}13 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.17. : Calcul de l'escompte d'un effet.

Un effet est escompté à 2 560,36 DH ; quel escompte a dû payer son détenteur si le taux d'escompte est de 11 % et que la date d'échéance est à 56 jours ?

Formalisons le problème posé.

Calculer E si Va= 2 560,36 DH, t = 11 % et n = 56 jours.

Calculons, d'abord la valeur nominale de l'effet car on a E = V – Va :

La relation (2.5) donne :

$$Va = V - \frac{V\ t\ n}{36\ 000}$$

$$V = \frac{36\ 000 \times Va}{36\ 000 - t\ n} = \frac{36000 \times 2560{,}36}{36\ 000 - 11 \times 56} = 2604{,}93 \text{ DH}$$

E = V – Va = 2604,93 – 2560,36 = 44,57 DH.

Exercice 8.1.18. : Calcul de l'escompte d'un effet.

Un effet est négocié, le 12/03, à 12 325,36 DH, à un taux d'escompte de 11 %, l'an. Quelle est le montant de l'escompte de cette négociation si la date d'échéance de l'effet est le 18/06 de la même année ?

Formalisons le problème posé.

Calculer E si Va = 12 325,36 DH, t = 11 % et n= x jours.

Calculons d'abord le nombre de jours entre le 12/03 et le 18/06 : soit n = 19 + 30 + 31 + 18 = 98 jours

L'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$Va = V - \frac{V\,t\,n}{36\,000} = V\,(1 + \frac{t\,n}{36\,000}) = V\,\frac{36\,000 + t\,n}{36\,000}$$

$$E = Va - V = Va\,(1 - \frac{36\,000}{36\,000 + t\,n})$$

$$E = 12\,325{,}36\,(1 - \frac{36\,000}{36\,000 + 11 \times 98}) = 358{,}35 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.19. : Calcul de la valeur nominale d'un effet.

Quelle est la valeur nominale d'un effet, négocié 57 jours avant échéance, à 5 327,58 DH si le taux d'escompte est 9,75 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer V si Va = 5 327,58 DH, t = 9,75 % et n= 57 jours.

L'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$Va = V - \frac{V\,t\,n}{36\,000} = V\,(1 - \frac{t\,n}{36\,000}) = V\,\frac{36\,000 - t\,n}{36\,000}$$

$$V = \frac{36000 \times Va}{36000 - t\,n} = \frac{36\,000 \times 5\,327{,}58}{36\,000 - 9{,}75 \times 57} = 5\,411{,}11 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.20. : Calcul de la valeur nominale d'un effet.

Un effet de date d'échéance le 25/07 est négocié le 02/03, à un taux d'escompte de 10,50 %, à 12 327,87 DH. Quelle est sa valeur nominale ?

Formalisons le problème posé.

Calculer V si Va = 5 327,58 DH, t = 9,72 % et n= x jours.

Calculons d'abord le nombre de jours entre le 02/03 et le 25/07, soit n = 29 + 30 + 31 + 30 + 25 = 145 jours.

L'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$Va = V - \frac{V\ t\ n}{36\ 000} = V\ (1 - \frac{t\ n}{36\ 000}) = V\ \frac{36\ 000 - t\ n}{36\ 000}$$

$$V = \frac{36000 \times Va}{36000 - t\ n} = \frac{36\ 000 \times 12\ 327{,}87}{36\ 000 - 10{,}50 \times 145} = 12\ 872{,}26\ DH$$

Exercice 8.1.21. : Calcul de la valeur actuelle d'un effet.

Un effet de valeur nominale 36 300 DH et d'échéance 25 jours est escompté à un taux de 9,25 % ; quelle est sa valeur actuelle ?

Formalisons le problème posé.
Calculer Va si V = 36 300 DH, n = 25 jours et t = 9,25 %.

L'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$Va = V - \frac{V\ t\ n}{36\ 000} = 36\ 000 \times\ (1 - \frac{9{,}25 \times 25}{36\ 000}) = 35\ 768{,}75\ DH$$

Exercice 8.1.22. : Calcul de la valeur nette d'un effet.

Un effet a pour échéance le 25/04, il est négocié, le 31/01, à un taux d'escompte de 11 % avec des frais bancaires égales à 27,38 DH, soumis à une TVA de 7 %. Quelle est la valeur nette de cet effet si sa valeur nominale est de 10 000 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer V_n nette si V= 10 000 DH, t = 11 % et les frais bancaires = 27,38 DH, avec 7 % de TVA.

Calculons, d'abord le nombre de jours entre le 31/01 et le 25/04, soit n = 28 + 31 + 25 = 84 jours.

Calculons, ensuite l'escompte payé pour la négociation, pour ce faire la relation (2.6) donne :

$$E = \frac{V\ t\ n}{36000} = \frac{10\,000 \times 11 \times 84}{36\,000} = 256{,}67 \text{ DH}$$

Calculons, enfin les agios bancaires :

Agios = 256,67 + 27,38 x 1,07 = 285,97 DH

La valeur nette est donc V_n = 10 000 – 285,97 = 9 714,03 DH

Exercice 8.1.23. : Calcul du taux d'escompte d'un effet.

Une entreprise escompte un effet d'une valeur nominale de 32 600 DH pour une valeur actuelle de 31 900 DH. Quel est le taux d'escompte si la date d'échéance est de 97 jours ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si V = 32 600 DH Va = 31 900 DH et n = 97 jours.

L'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$Va = V - \frac{V\ t\ n}{36\,000} \Rightarrow t = \frac{36\,000\ (\ V - Va\ )}{V\ n}$$

$$t = \frac{36\,000\ (32\,600 - 31\,900\ )}{32\,600 \times 97} = 7{,}97\ \%$$

Exercice 8.1.24. : Calcul du taux d'escompte d'un effet.

Quel est le taux d'escompte d'un effet négocié le 15/02, à 0,98 de sa valeur nominale et qui échoit le 25/04 de la même année ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si Va = 0,98 V et n = x jours.

Le calcul du nombre de jours, entre le 15/02 et le 25/04, pour arriver à l'échéance soit : n = 13 + 31 + 25 = 69 jours.

L'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$t = \frac{36\,000\ (\ V - Va\ )}{n\ V}$$

Or $\frac{V - Va}{V} = 0{,}02$ donc $t = \frac{36\,000 \times 0{,}02}{69} = 10{,}43\ \%$

Exercice 8.1.25. : Calcul de la date d'échéance d'un effet.

Un effet est négocié à 97,50 % de sa valeur nominale. Quelle est sa date d'échéance, en mois, si le taux d'escompte est de 10 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.
Calculer m si Va = 0,975 V et t = 10 %.

L'utilisation de la relation (2.2) donne :

$$m = \frac{1\,200\ \ (\ V - Va\ )}{t\ V} \qquad \text{avec Va = 0,975 V}$$

Or $\frac{V - Va}{V} = 0{,}025$ donc $m = \frac{1\,200 \times 0{,}025}{10} = 3$ mois

Exercice 8.1.26. : Calcul de la date d'échéance d'un effet.

Quelle est la date d'échéance d'un effet de valeur nominale 6 500 DH, négocié, le 30/01, à un taux de 9,50 % et à une valeur de 6 350 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si V = 6 500 DH, Va = 6 350 DH et t = 9,50 %.

L'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$n = \frac{36\,000\ (\ V - Va\ )}{t\ V} = \frac{36\,000 \times 150}{9{,}50 \times 6\,500} = 88\ \text{jours}$$

Comme il s'agit de jours dont le nombre doit être un entier, nous arrondissons le résultat au nombre juste supérieur trouvé par les calculs.

La date d'échéance est à 88 jours après le 30/01 soit le 28/04.

Exercice 8.1.27. : Calcul de la valeur nette d'un effet.

Pour négocier un effet de valeur 14 000 DH et de date d'échéance 150 jours, un commerçant a dû payer 600 DH d'escompte et 180 DH de frais bancaires, soumis à la TVA de 7 %.

Quelle est la valeur nette de l'effet ?

Quels sont le taux d'escompte affiché et le taux d'escompte réel de cette négociation ?

Formalisons le problème posé.

Calculer Vn, t et tr si V = 14 000 DH, E = 600 DH et FB = 180 DH avec la TVA = 7 %.

Pour calculer Vn, l'utilisation de la relation (2.7) donne :

Vn = V - E – FB = 14 000 – 600 – 180 x 1,07 = 13 207,40 DH

Les agios = 600 + 180 x 1,07 = 792,60 DH

Pour calculer t l'utilisation de la relation (2.5) donne :

$$t = \frac{36\,000\,(V - Va)}{n\,V} = \frac{36\,000 \times 600}{150 \times 14\,000} = 10{,}29\ \%$$

Pour calculer tr l'utilisation de la relation (2.8) donne :

$$tr = \frac{36\,000\ \text{Agios}}{n\,V} = \frac{36\,000 \times 792{,}60}{150 \times 14\,000} = 13{,}59\ \%$$

Exercice 8.1.28. : Calcul de la valeur nette d'un effet.

Sachant que le taux d'escompte réel est de 11,37 %, quelle est la valeur nette d'un effet de valeur nominale 9 750 DH et de date d'échéance 68 jours ?

Formalisons le problème posé.

Calculer Vn, si V = 9 750 DH tr = 11,37 % et n = 68 jours.

Pour calculer Vn l'utilisation de la relation (2.7) donne :

$$\text{Agios} = \frac{\text{V tr n}}{36\,000} = \frac{9\,750 \times 11{,}37 \times 68}{36\,000} = 209{,}40 \text{ DH}$$

Vn = V – Agios = 9 750 – 209,40 = 9 540,60 DH

Exercice 8.1.29. : Calcul du taux réel d'escompte d'un effet.

On négocie un effet de 3 600 DH de valeur nominale à 9 %. Les frais bancaires s'élèvent à 9,5 DH, hors TVA qui est de 7 %. Quel est le taux réel d'escompte si la date d'échéance est de 75 jours ?

Formalisons le problème posé.

Calculer tr si V = 3 600 DH, t = 9 %, FB = 9,50 DH n = 75 jours et TVA = 7 %.

Pour calculer E, l'utilisation de la relation (2.3) donne :

$$E = \frac{\text{V t n}}{36\,000} = \frac{3\,600 \times 9 \times 75}{36\,000} = 67{,}50 \text{ DH}$$

La relation (2.6) donne:

Agios = E + FB x 1,07 = 67,50 + 9,50 x 1,07 = 77,67 DH.

Pour calculer tr l'utilisation de la relation (2.8) donne :

$$\text{tr} = \frac{36\,000 \text{ Agios}}{\text{n V}} = \frac{36\,000 \times 77{,}67}{75 \times 3\,600} = 10{,}36\ \%$$

Exercice 8.1.30. : Calcul de la date d'équivalence de deux effets.

Calculer la date d'équivalence de deux effets de valeurs 11 300 DH et 11 100 DH et de dates d'échéance respectives 94 et 41 jours. Le taux d'intérêt est de 12 %.

Formalisons le problème posé.

Calculer n si V_1 = 11 3000 DH, V_2 = 11 1000 DH, n_1 = 94 jours, n_2 = 41 jours et t = 12 %.

La relation (2.9) donne :

$$n = \frac{V_1\ n_1 - V_2\ n_2}{V_1 - V_2} - \frac{36\,000}{t} = \frac{11\,300 \times 94 - 11\,100 \times 41}{11\,300 - 11\,100}$$

$$- \frac{36\,000}{12} = 36 \text{ jours}$$

Nous avons arrondi le résultat trouvé au nombre juste supérieur, du fait qu'il s'agit de nombre de jours qui doit être entier.

Exercice 8.1.31. : Calcul de la date d'échéance d'un effet.

Deux effets de valeurs 3 500 DH et 3 450 DH, sont escomptés à 10 %. Quelle est la date d'échéance du 2ème effet si celle du 1er est de 87 jours et la date d'équivalence des deux effets est 6 jours ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n_2 si $V_1 = 3\,500$ DH, $n_1 = 87$ jours, $V_2 = 3\,450$ DH, $n = 6$ jours et $t = 10$ %.

De la relation (2.9) on peut tirer n_2 :

$$n_2 = \frac{V_1\ n_1}{V_2} - \frac{V_1 - V_2}{V_2}\left(\frac{36\,000}{t} + n\right) = \frac{3\,500 \times 87}{3\,450}$$
$$- \frac{50}{3\,450}\,(\,3\,600 + 6\,) = 36 \text{ jours}$$

Exercice 8.1.32. : Calcul de l'échéance moyenne de plusieurs effets.

Trois effets de valeurs nominales 2 500 DH, 3 500 DH et 4 000 DH et d'échéances respectives 25, 30 et 40 jours sont escomptés à 9 %. Quelle est l'échéance moyenne de ces trois effets ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si $V_1 = 2\,500$ DH, $V_2 = 3\,500$ DH, $V_3 = 4\,000$ DH, $n_1 = 25$ jours, $n_2 = 30$ jours, $n_3 = 40$ jours et $t = 9$ %.

La relation (2.15) donne :

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} V_i\, n_i}{\sum_{i=1}^{i=3} V_i} = \frac{2\,500 \times 25 + 3\,500 \times 30 + 4\,000 \times 40}{2\,500 + 3\,500 + 4\,000} = 33 \text{ jours}$$

Le résultat a été arrondi au nombre entier juste supérieur du fait qu'il s'agit de nombre de jours qui doit être entier.

Exercice 8.1.33. : Calcul de la valeur d'un effet équivalent à plusieurs effets.

En reprenant l'énoncé de l'exercice 8.1.35, calculer la valeur de l'effet équivalent au trois effets qui ait une échéance à 50 jours.

Formalisons le problème posé.

Calculer w si V_1 = 2 500 DH, V_2 = 3 500 DH, V_3 = 4 000 DH, n_1 = 25 jours, n_2 = 30 jours, n_3 = 40 jours, t = 9 % et n = 50 jours.

La relation (2.13) donne :

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} (36\,000 - t\,n_i)\,V_i}{36\,000 - t\,m} = \frac{(36\,000 - 9 \times 25) \times 2500}{36\,000 - 9 \times 50} +$$

$$+ \frac{(36\,000 - 9 \times 30) \times 3\,500 + (36\,000 - 9 \times 40) \times 4000}{36\,000 - 9 \times 50} = 10\,043{,}67 \text{ DH}$$

Exercice 8.1.34. : Calcul de l'opportunité d'escompte.

Une société escompte un effet d'une valeur nominale de 2 578,34 DH, 37 jours, avant sa date d'échéance, à un taux de 10,25 %. Sachant que le taux du découvert bancaire est de 11,50 % on vous demande de donner votre avis sur l'opportunité de l'escompte de cet effet si l'on suppose que le solde bancaire de la société est débiteur de 1 000 DH.

Formalisons le problème posé.

Comparer l'escompte E d'un effet et l'intérêt I d'un découvert.

Calculer E si V = 2 578,34 DH, t = 10,25 % et n = 37 jours.

Calculer I si C = 1 000 DH, t = 11,50 % et n = 37 jours.

La relation (2.3) donne E :

$$E = \frac{V\ t\ n}{36000} = \frac{2\,578{,}34 \times 10{,}25 \times 37}{36\,000} = 27{,}16 \text{ DH}.$$

La relation (1.4) donne I :

$$I = \frac{C\ t\ n}{36\,000} = \frac{1\,000 \times 11{,}50 \times 37}{36\,000} = 11{,}82 \text{ DH}$$

Au vue de ce qu'aurait payé la société, comme intérêt pour son découvert, si elle n'avait pas escompté l'effet, il était préférable qu'elle n'escompte pas son effet.

Exercice 8.1.35. : Calcul du montant d'un capital et du taux d'intérêts.

Quel est le capital qui, placé, pendant 35 jours, rapporte un intérêt de 92,97 DH et placé, pendant 87 jours, acquiert une valeur égale à 11 481,15 DH ?

Calculer aussi le taux d'intérêt.

Formalisons le problème posé.

Calculer C et t si I_1 = 92,97 DH, n_1 = 35 jours, VA_2 = 11 481,15 DH et n_2 = 87 jours.

Les relations (1.4) et (1.7) donnent :

$$I_1 = \frac{C\ t\ n_1}{36\,000} \quad \Rightarrow \quad \frac{C\ t}{36\,000} = \frac{I_1}{n_1} = 2{,}65629$$

$$VA_2 = C + \frac{C\ t\ n_2}{36\,000} = C + 2{,}65629 \times 87 = C + 231{,}15 = 11\,481{,}15$$

Ce qui donne : C = 11 250 DH et t = 8,50 %

Exercice 8.1.36. : Calcul de la valeur nominale d'un effet et du taux d'escompte.

Quelle est la valeur nominale d'un effet qui, escompté, à 67 jours de sa date d'échéance, coûte 147,40 DH d'escompte et qui, escompté, à 121 jours de sa date d'échéance, a une valeur actuelle égale à 6 933,80 DH.

Calculer aussi le taux d'escompte.

Formalisons le problème posé.

Calculer V et t si E_1 = 147,40 DH, n_1 = 67 jours, Va_2 = 6 933,80 DH et n_2 = 121 jours.

Les relations (2.3) et (2.5) donnent :

$$E_1 = \frac{V\ t\ n_1}{36\ 000} \quad \Rightarrow \quad \frac{V\ t}{36\ 000} = \frac{E_1}{n_1} = 2{,}2$$

$$Va_2 = V - \frac{V\ t\ n_2}{36\ 000} = V - 2{,}2 \times 121 = V + 264{,}2 = 6\ 933{,}80$$

Ce qui donne pour V = 7 200,00 DH et t = 11 %.

Exemple 8.1.37. : Etude de cas : Arrêté d'un compte bancaire.

M. LAMINE a un compte bancaire auprès de la Wafa Banque, il effectue les opérations suivantes :

Dates	Opérations	Montants DH
30/09	*Solde du compte débiteur*	*10 500,30*
02/11	*Versement chèque hors place*	*12 350,00*
13/12	*Retrait espèces*	*35 500,00*
05/01	*Remise effet au 30/04*	*30 000,00*
22/02	*Retrait chèque*	*21 000,00*

Donner l'arrêté du compte de M. LAMINE, au 31/03, sachant que :

- *Le taux d'escompte est de 9 %, l'an ;*
- *Le taux d'intérêt d'un découvert est de 11 %, l'an ;*
- *La date de valeur, à l'encaissement, d'un chèque hors place est j + 15 ;*
- *La date de valeur, à l'encaissement, de l'escompte d'un effet est j + 2.*
- *La date de valeur, au retrait, d'un chèque, sur place ou hors place, est j.*

Pour calculer le solde du compte au 31/03, nous dressons les deux tableaux suivants :

Date	**Opération**	**Date valeur**	**Nombre jours**	**Crédit**	**Débit**
30/09	Solde	30/09	48		10 500
02/11	Chèque hors place	17/11	25	12 350	
13/12	Retrait	12/12	26		35 500
05/01	Effet 30/04	07/01	42	30 000	
22/02	Retrait	21/02	38		21 000

Dates	**Nombre jours**	**Soldes**		**Intérêts Escompte**
		Crédit	**Débit**	
30/09	48		10 500,00	126,00
02/11	25	1 850,00		0,00
13/12	26		33 650,00	218,73
05/01	42 115		3 650,00	38,33 862,50
22/02	38		24 650,00	234,18
Total des intérêts et escompte				**1 479,74**
Solde au 31/03			**26 129,74**	

Le calcul de l'escompte de l'effet de 30 000 DH à 115 jours de son échéance donne, d'après la relation (2.1) : 682,50 DH.

Exercice 8.1.38. : Arrêté d'un compte sur carnet.

Hamid dispose d'un compte sur carnet, auprès de la BMCI, il effectue les opérations indiquées sur le tableau ci-dessous.

Calculer le solde du compte au 31/12 sachant que le taux d'intérêt sur carnet est de 8 %, le prélèvement fiscal est de 30 % et les dates de valeur sont les 16 et fin de chaque mois.

Dates	Intitulé des opérations	Montants
30/09	*Solde du compte*	*11 250,00*
13/10	*Retrait*	*2 500,00*
25/10	*Versement*	*7 250,00*
05/11	*Versement*	*8 750,00*
27/11	*Versement*	*7 750,00*
10/12	*Retrait*	*9 400,00*
17/12	*Retrait*	*2 750,00*
25/12	*Retrait*	*4 750,00*
30/12	*Retrait*	*1 500,00*

Pour calculer le solde du compte au 31/12, nous dressons les deux tableaux suivants :

Date	Opération	Date valeur	Nombre jours	Crédit	Débit	Soldes
30/09	Solde	30/09	0			11 250
13/10	Retrait	30/09	15		2 500	8 750
25/10	Verse	15/10	15	7 250		16 000
05/11	Verse	31/10	16	8 750		24 750
27/11	Verse	15/11	15	7 750		32 500
10/12	Retrait	30/11	15		9 400	23 100
17/12	Retrait	15/12	- -		2 750	20 350
25/12	Retrait	15/12	- -		4 750	15 600
30/12	Retrait	15/12	15		1 500	14 100

Dates	Nombre jours	Soldes	Intérêts
30/09	0	11 250	
13/10	15	8 750	32,81
25/10	15	16 000	60,00
05/11	16	24 750	99,00
27/11	15	32 500	121,88
10/12	15	23 100	86,63
17/12	- -	20 350	
25/12	- -	15 600	
30/12	15	14 100	52,88
Total des intérêts			**453,20**
Solde au 31/12		**14 553,20**	

8.2. EXERCICES RELATIFS A LA PARTIE 2.

MATHEMATIQUES FINANCIERES A LONG TERME.

Exercice 8.2.1. : Calcul de la valeur acquise d'un capital placé à intérêts composés.

Un capital de 12 500 DH est placé, pendant 27 mois, au taux de 12 % ; quelle est sa valeur acquise ?

Formalisons le problème posé.
Calculer VA si C = 12 500 DH, t = 12 % et n = 27 mois.

L'utilisation de la relation (3.1) donne :
$VA = C (1 + t)^n = 12\,500 (1 + t_m)^{27}$

Il faut utiliser le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12 %. La table financière T3 donne t_m = 0,949 % pour t = 12 %.

$VA = 12\,500 \times 1{,}00949^{27} = 16\,131{,}12$ DH.

On aurait pu utiliser la table T1b pour la valeur t_m = 0,950 % qui est très proche de 0,949 % et trouver :

12 500 x $1{,}0950^{27}$ = 12 500 x 1,29083 = 16 135,38 DH ce qui est approximativement le résultat.

Exercice 8.2.2. : Calcul de la valeur acquise.

Un compte sur carnet a un solde, au 31/03 de 57 350 DH, quel est son solde, au 31/12 de la même année, sachant que les intérêts sur carnet sont calculés et capitalisés, tous les trimestres, que le taux d'intérêts sur carnet est de 7 % et que le taux de prélèvement fiscal est de 30 %.

Formalisons le problème posé.

Calculer VA si C = 57 350 DH, t = 7 %, n = 3 trimestres et prélèvement fiscal = 30 %

La valeur acquise est VA = C + I' avec I' intérêts après impôts.

Les intérêts créditeurs sont calculés et capitalisés, tous les trois mois, il faut donc utiliser la relation (3.2) donne I, avant impôts :

$I = C\,(1 + t)^n – I = 57\,350\,(1 + t_t)^3$ -I

Il faut utiliser le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 7 %. La table financière T3 donne t_t = 1,706 % pour t = 7 %.

I = 57 350 x $1{,}01706^3$ – 57 350 = 2 985,53 DH.

On aurait pu utiliser la table T1b pour trouver $1{,}01706^3$ et employer la méthode d'interpolation.

Calculons I' après impôts :
I' = 0,70 x I = 0,70x2 985,53 = 2 089,87 DH

Ce qui donne pour valeur acquise :
VA = C + I = 57 350 + 2089,87 = 59 439,87 DH

Exercice 8.2.3. : Calcul de la valeur acquise.

Un compte sur chèque a un solde débiteur, au 30/04, de 15 750 DH ; quel est son solde au 31/07 de la même année, sachant que le compte n'a pas été mouvementé, que les intérêts sur chèque sont calculés et capitalisés, tous les mois, que le taux d'intérêts du découvert est de 11,50 % et que la TVA sur les intérêts est de 7 % ?

Formalisons le problème posé.
Calculer VA si C = 15 750 DH, t = 11,50 %, m = 3 mois et TVA = 7 %.

La valeur acquise est VA = C + I' avec I' après application de la TVA.

Les intérêts débiteurs, sur compte chèque, sont calculés et capitalisés, tous les mois, il faut donc utiliser la relation (3.2) qui donne :
$I = C (1 + t)^n – C = 15\,750 (1 + t_m)^3 - C$

Il faut utiliser le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11,50 %. La table financière T3 donne t_m = 0,911 % pour t = 11,50 %.

$I = 15\,750 \text{ x } 1{,}00911^3 – 15\,750 = 434{,}38$ DH.

Après application de la TVA, ces intérêts deviennent :
I' = 1,07 x I = 1,07x434,38 = 464,79 DH.

La valeur acquise est donc :
VA = 15 750 + 464,79 = 16 214,79 DH.

Essayons de retrouver $1{,}00911^3$ par la table financière T1b :
Pour t = 0,900 % on a $y = (1+t)^3 = 1{,}02724$
Pour t = 0,925 % on a $y = (1+t)^3 = 1{,}02801$
Ainsi pour $\Delta t = 0{,}025$ % on a $\Delta y = 0{,}00086$
Ce qui donne pour $\Delta t = 0{,}011$ % on a :
$\Delta y = 0{,}00086 \times 0{,}011 / 0{,}025 = 0{,}000378$
Ce qui fait pour t = 0,911 % on aura y = 1,027618
Soit VA = 1,027618x15 750 = 16 184,98 DH.

On trouve un résultat légèrement différent, du fait des arrondis inhérents à l'utilisation des tables financières.

Exercice 8.2.4. : Calcul de la valeur acquise.

Un compte sur chèque a un solde débiteur, au 30/06, de 305 210,37 DH ; quel est son solde, 7 mois après, sachant que le compte n'a pas été mouvementé, que les intérêts débiteurs sur chèque sont calculés et capitalisés, tous les mois, que le taux d'intérêts du découvert est de 10 % et que la TVA sur les intérêts est de 7 % ?

Formalisons le problème posé.
Calculer VA si C = 305 210,37 DH, m = 7 mois, t = 10 % et TVA = 7 %.

La valeur acquise est VA = C + I' avec I' après application de la TVA.

Les intérêts débiteurs sont calculés et capitalisés, tous les mois, il faut donc utiliser la relation (3.2) donne I sans TVA :
$I = C(1+t)^n - I = 305\,210{,}37\,(1+t_m)^7 - I$

Il faut utiliser le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10 %. La table financière T3 donne t_m = 0,797 % pour t = 10 %.

$I = 305\,210{,}37 \times 1{,}00797^7 - 305\,210{,}37 = 17\,440{,}27$ DH.

Après application de la TVA, les intérêts deviennent :
$I' = 1{,}07 \times 17\,440{,}27 = 18\,661{,}09$ DH

Exercice 8.2.5. : Calcul de la valeur actuelle.
Un capital, placé au taux de 9 %, acquiert une valeur de 100 000 DH, au bout de 3 ans ; quelle est sa valeur d'origine ?

Formalisons le problème posé.
Calculer Va si VA = 100 000 DH n = 3 ans et t = 9 %.

La relation (3.3) donne :
$Va = VA\,(1 + t)^{-n} = 100\,000 \times 1{,}09^{-3} = 77\,218{,}35$ DH.

Exercice 8.2.6. : Calcul de la valeur actuelle.
Un capital, placé, pendant 37 mois, acquiert une valeur de 37 327,39 DH ; quelle est sa valeur d'origine si le taux d'intérêts est de 7,20 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.
Calculer Va si VA = 37 327,39 DH, n = 37 mois = 3 ans et 1 mois et t = 7,20 %.

La relation (3.3) donne :
$Va = VA\,(1 + t)^{-n} = VA\,(1 + t_m)^{-37} = VA\,(1+t)^{-3}\,(1 + t_m)^{-1}$

Il faut utiliser le taux mensuel équivalent au taux annuel de 7,20 %. La table financière T3 donne t_m = 0,581 % pour t = 7,20 %.
$Va = 37\,327{,}39 \times 1{,}0720^{-3} \times 1{,}00581^{-1} = 30\,125{,}02$ DH.

Ce résultat est légèrement différent de celui trouvé, avec la relation VA $(1 + t_m)^{-37}$ = 30 125,72 DH, ceci vient de l'approximation faite dans la valeur de t_m

Exercice 8.2.7. : Calcul de la valeur actuelle.

Quel est le solde débiteur d'un compte bancaire pour lequel la banque a facturé 325,37 DH d'intérêts en 2 mois, sachant que le taux d'intérêt est 12 % et que la TVA sur intérêts est de 7 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C si I = 325,37 n = 2 mois, t = 12 % et TVA = 7 %.

Les intérêts débiteurs, sur un compte chèque, sont calculés et capitalisés, tous les mois, il faut donc utiliser la relation (3.2) qui donne :

$I = C [(1 + t_m)^2 – 1] \Rightarrow C = I / [(1 + t_m)^2 – 1]$

Il faut utiliser le taux mensuel équivalent au taux annuel de 7 %. La table financière T3 donne t_m = 0,565 % pour t = 7 %.

325,37 = I x 1,07 => I = 325,37 / 1,07 = 304,08 DH

$C = 304{,}08 / (1{,}00565^2 – 1) = 26\,833{,}98$ DH

Exercice 8.2.8. : Calcul de la valeur actuelle.

Quel est le solde créditeur d'un compte sur carnet pour lequel la banque a payé, en 2 trimestres, 1 768,38 DH d'intérêts, sachant que le taux d'intérêts sur carnet est de 6,50 % et que le prélèvement fiscal est de 30 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C si I = 1 768,38 DH, n = 2 trimestres, t = 6,50 %, et prélèvement fiscal de 30 % ;

Les intérêts créditeurs, sur carnet, sont calculés et capitalisés, tous les trois mois, il faut donc utiliser la relation (3.2) qui donne :

$I = C\,[(1 + t_t)^2 – 1] \Rightarrow C = I / [(1 + t_t)^2 – 1]$

Il faut utiliser le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 6,50 %. La table financière T3 donne t_t = 1,587 % pour t = 6,50 %.

Calculons les intérêts hors prélèvement fiscal :
1 768,38 = I x 0,70 => I = 1 768,38 / 0,70 = 2 526,26 DH
Ce qui donne pour C :
$C = 2\,526{,}26 / (1{,}01587^2 – 1) = 78\,965{,}86$ DH.

Exercice 8.2.9. : Calcul du taux d'intérêts composés.

Un capital de 7 328,36 DH est placé, pendant 7 mois, il acquiert, alors, une valeur de 7 628,36 DH. Quel est son taux de placement ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si C = 7 328,36 DH, VA = 7 628,36 et n = 7 mois.

La relation (3.1) donne :
$VA = C\,(1 + t_m)^n \Rightarrow (1 + t_m)^7 = VA / C = 1{,}040937$

L'utilisation de la table financière T1b donne :

On pour t_m = 0,550 %, y = 1,03914
Et pour t_m = 0,575 %, y = 1,04095
Ce qui fait pour Δt_m = 0,025 % on a Δy = 0,00181
Soit pour Δy = 0,001797
On aura Δt_m = 0,025x0,001797/0,00181 = 0,0248 %
Donc t_m = 0,550 + 0,0248 = 0,5748 %

Le taux annuel est alors égal à : 7,12 %

Exercice 8.2.10. : Calcul du taux d'intérêts composés.

Un compte sur carnet voit son solde passer de 15 300 DH à 15 584,65 DH, après 5 trimestres. Quel est le taux d'intérêts sur carnet si le prélèvement fiscal est de 30 % ?

On suppose que le compte n'a pas été mouvementé, pendant les 5 trimestres.

Formalisons le problème posé.

Calculer t si C = 15 300 DH, VA = 15 584,65 DH, n = 5 trimestres et prélèvement fiscal = 30 %.

Le calcul de la valeur acquise avant prélèvement fiscal de 30 % donne :

Intérêt après impôt : 15 584,65 – 15 300,00 = 284,65 DH

Intérêt avant impôt : 284,65 ÷ 0,70 = 406,64 DH

La valeur acquise avant impôt est donc 15 300,00 + 406,64 = 15 706,64

La relation (3.1) donne pour des durées trimestrielles :

$VA = C\ (1 + t_t)^5 = 15\ 300 \text{ x } (1 + t_t)^5 = 15\ 584{,}65$

$(\ 1+t_t\ )^5 = 15\ 706{,}64 / 15\ 300{,}00 = 1{,}02\ 658$

En utilisant la fonction logarithme :

$5 \log (1 + t_t) = \log 1{,}02\ 658$

$\log (1 + t_t) = (\log 1{,}02\ 658)/5 =$

En utilisant la fonction exceptionnelle

$1 + t_t = e$

$t_t =$ %

Le taux annuel correspondant est donc t = %

Exercice 8.2.11. : Calcul du taux d'intérêts composés.

Un compte bancaire a un solde de 15 720,30 DH, au 30/04. Ce solde devient égal à 16 985,99 DH, le 31/12, de la même année. Quel est le taux d'intérêts du découvert bancaire, sachant que les intérêts débiteurs sont calculés et capitalisés, tous les mois et que le taux de TVA sur les intérêts est de 7 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t_m si C = 15 720,30 DH, VA = 16 985,99 DH, n = 8 mois et TVA = 7 %.

Calculons d'abord I :

I = (VA – C) / 0,93 = (16 985,99 – 15 720,30) / 0,93

Ce qui donne I = 1360,96 DH.

Les relations (3.1) et (3.2) donnent :

$VA = C\,(1 + t_m)^8$

$I = C\,(1 + t_m)^8 - C = 15\,720{,}30 \times (1 + t_m)^8 - 15\,720{,}30$

$(1 + t_m)^8 = (15\,720{,}30 + 1360{,}96) / 15\,720{,}30 = 1{,}086573$

L'utilisation de la table financière T1b permet de déterminer la valeur de t_m , en effet pour n = 8 :

$t_m = 1{,}025\ \%$ on a $y = (1 + t_m)^8 = 1{,}08500$

$t_m = 1{,}050\ \%$ on a $y = (1 + t_m)^8 = 1{,}08715$

Ainsi pour $\Delta t_m = 0{,}025\ \%$ on $\Delta y = 0{,}00215$

Et pour $\Delta y = 0{,}001573$

on aura $\Delta t = 0{,}025 \times 0{,}001573 / 0{,}00215 = 0{,}002\ \%$

ce qui donne pour t = 1,025 + 0,002 = 1,027 %

Exercice 8.2.12. : Calcul de la durée de placement.

Un capital de 73 000 DH est placé au taux d'intérêts composés de 9 %, l'an. Au bout de combien de temps ce capital acquiert-il une valeur de 77 318,40 DH ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si C = 73 000 DH, VA = 77 318,40 DH et t = 9 %.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9 % est $t_m = 0{,}721$ % d'après la table financière T3.

La relation (3.1) donne :
$VA = C (1 + t_m)^n = 73\ 000 \times (1 + t_m)^n = 77\ 318{,}40$
$(1 + 0{,}00721)^n = 77\ 318{,}40 / 73\ 000 = 1{,}059156$

L'utilisation de la table financière T1b permet de déterminer la valeur de n, et effet, au vue des valeurs de cette table, on peut estimer que n est proche de 8.
Calculons donc $(1 + 0{,}00721)^n$ pour n = 8
$t_m = 0{,}700$ % on a $y = (1 + t_m)^8 = 1{,}05739$
$t_m = 0{,}725$ % on a $y = (1 + t_m)^8 = 1{,}05949$
Ainsi pour $\Delta t_m = 0{,}025$ % on $\Delta y = 0{,}0021$
Pour $\Delta t_m = 0{,}021$ % on aura $\Delta y = 0{,}0021 \times 0{,}021/0{,}025 = 0{,}001764$ ce qui donne pour y = 1,059154. Ceci conforte notre hypothèse de n = 8.

On aurait pu trouver ce résultat grâce à la fonction logarithme :
$(1 + 0{,}00721)^n = 1{,}059156$
$n \log (1 + 0{,}00721) = \log 1{,}059156$
$n = \log 1{,}059156 / n \log (1 + 0{,}00721) = 8$ mois.

Exercice 8.2.13. : Calcul de la durée de placement.

Un compte bancaire voit son solde débiteur passer de 105 300 DH à 116 828,99 DH. Combien de mois le compte est resté non mouvementé si le taux du découvert bancaire est de 12 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si C = 105 300 DH, VA = 116 828,99 DH et t = 12 %

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12 % est, d'après la table financière T3, t_m = 0,949 %

La relation (3.2) donne :

$VA = C (1 + t_m)^n$ $105\,300 \times 1{,}00949^n = 116\,828{,}99$

$1{,}00949^n = 116\,828{,}99 / 105\,300 = 1{,}109487$

L'utilisation de la fonction logarithme donne :

n log 1,00949 = log 1,109487 = > n = 11 mois.

Dans ce cas on aurait pu aussi utiliser la table financière T1b, comme pour l'exercice 8.2.12.

Exercice 8.2.14. : Calcul de la durée de placement.

Un capital placé au taux d'intérêts composés de 8 % voit sa valeur passer de 100 000 DH à 104 633,49 DH. Combien de mois est resté placé ce capital si l'on suppose que le taux de prélèvement fiscal sur les intérêts est de 30 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si C = 100 000 DH, VA = 104 633,49 DH et t = 8 %

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 8 % est, d'après la table financière T3, t_m = 0,643 %.

La relation (3.8) donne :

$I = [C(1 + t_m)^n – C] \times 0{,}70$ en tenant compte du prélèvement fiscal de 30 %.

$VA = C + I = 0{,}30C + 0{,}70 \times C (1 + 0{,}00643)^n = 104\,633{,}49$

$(1 + 0{,}00643)^n = 1{,}066193$

L'utilisation de la fonction logarithme permet de calculer n, en effet :

n log $(1 + 0{,}00643)^n$ = log 1,066193 = > n = 10 mois.

Dans ce cas on aurait pu aussi utiliser la table financière T1b, comme pour l'exercice 8.2.12.

Exercice 8.2.15. : Calcul de la durée de placement.

Un compte sur carnet a un solde, au 31/03 de 102 000 DH. Quand est-ce que ce solde devient-il égal à 105 188,62 DH, sachant que les intérêts sur carnet sont calculés et capitalisés tous les trimestres, que le taux d'intérêts sur carnet est de 6 %, l'an et que le taux de prélèvement fiscal sur intérêts est de 30 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si C = 102 000 DH, VA = 105 188,62 DH, t = 6 % et taux de prélèvement fiscal = 30 %.

Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 6 % est, d'après la table financière T3, $t_t = 1{,}467$ %.

La relation (3.2)° donne :

$I = [C (1 + t_t)^n – C] \times 0{,}70$

$VA = C + I = C + 0{,}7 \times C(1 + t_t)^n – 0{,}7 \times C = 0{,}3 \times C + 0{,}7 \times C (1 + t_t)^n$

$105\ 188{,}62 = 30\ 600 + 71\ 400 \times 1{,}01467^n$

1,01467n = (105 188,60 – 30 600) / 71 400 = 1,044658

L'utilisation de la fonction logarithme permet de calculer t_t :

n log 1,01467 = log 1,044658 = 3 trimestres.

Le solde devient égal à 105 188,60 le 31 / 12.

Exercice 8.2.16. : Calcul de la durée de placement.

Un capital de 350 000 DH est placé, au taux annuel de 7,50 %, l'an. En combien de temps, ce capital acquiert-il une valeur de 383 086,16 DH ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si C = 350 000 DH, VA = 383 086,16 DH et t = 7,50 %.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 7,50 % est, d'après la table financière T3, t_m = 0,604 %.

La relation (3.1) donne :

$VA = C(1 + t_m)^n = 383\ 086{,}16 = 350\ 000 \times 1{,}00604^n$

$1{,}00604^n = 383\ 086{,}16 / 350\ 000 = 1{,}094532$

L'utilisation de la fonction logarithme permet de calculer n :

$n \log 1{,}00604 = \log 1{,}094532$

$n = \log 1{,}094532 / \log 1{,}00604 = 15$ mois.

L'utilisation de la table financière T1b permet aussi de trouve pour t_m = 0,604 % n = 15 mois.

Exercice 8.2.17. : Calcul de l'escompte à intérêts composés.

Un effet de 150 000 DH de valeur nominale aune échéance de 31 mois. Calculer le montant de l'escompte payé lors de sa négociation.

Le taux d'escompte est de 9,50 %, l'an.

Formalisons le problème posé.

Calculer E si V = 150 000 DH, n = 31 mois et t = 9,50 %.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9,50 % est, d'après la table financière T3, t_m = 0,759 %.

La relation (3.5) donne :

$E = V[1-(1+t_m)]^{-n} = 150\ 000\ (1 - 1{,}00759^{-31}) = 31\ 343{,}39$

Comme 31 mois = 2 ans et 7 mois, on pouvait calculer $1,00759^{-31} = 1,095^{-2} \times 1,00759^{-7}$, on aurait trouvé E = 31347,72. La différence vient des arrondis de calcul des calculettes.

Exercice 8.2.18. : Calcul de la valeur actuelle d'un effet.

Un effet de valeur nominale 275 000 DH a une échéance de 14 mois. Quelle est sa valeur actuelle s'il est négocié à un taux de 11,20 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer VA si V = 275 000 DH, n = 14 mois et t = 11 %.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11 % est, d'après la table financière T3, $t_m = 0,873$ %.

La relation (3.4) donne :

$Va = V(1 + t_m)^{-n} = 275\,000 \times 1,00873^{-14} = 242\,951,31$ DH

L'utilisation de la table financière T2b permet aussi de trouver pour Va moyennant une interpolation linéaire.

Exercice 8.2.19. : Equivalence d'effets escomptés à intérêts composés.

Montrer si les deux effets suivants, escomptés à intérêts composés, sont équivalents :

Effet N°1 : $V_1 = 10\,500$ DH, $n_1 = 3$ mois et t = 10 % ;

Effet N°2 : $V_2 = 11\,500$ DH, $n_2 = 6$ mois et t = 11 % ;

Quelle doit être la valeur nominale du 2ème effet pour qu'il soit équivalent au 1er ?

Formalisons le problème posé.

Calculer et comparer Va_1 et Va_2 si $V_1 = 10\,500$ DH, $V_2 = 11\,500$ DH, $n_1 = 3$ mois, $n_2 = 6$ mois $t_1 = 10$ % et $t_2 = 11$ %.

Les taux mensuels équivalents aux taux annuels de 10 et 11 % sont, d'après la table financière T3, t_{m1} = 0,797 % et t_{m2} = 0,873 %.

La relation (4.3) donne :
$Va_1 = V_1(1 + t_{m1})^{-n1} = 10\,500 \times 1{,}00797^{-3} = 10\,252{,}89$
$Va_2 = V_2(1 + t_{m2})^{-n2} = 11\,500 \times 1{,}00873^{-6} = 10\,915{,}62$
$Va_1 \neq Va_2$ donc les deux effets ne sont pas équivalents.

Pour que le 2ème effet soit équivalent au 1er, sa valeur nominale doit être tel que :
$V_2 \times 1{,}00873^{-6} = 10\,252{,}89$
$V_2 = 10\,252{,}89 \times 1{,}00873^{6} = 10\,801{,}79$ DH.

Exercice 8.2.20. : Calcul de la durée d'escompte à intérêts composés.

Un effet de valeur nominale 9 750 DH a été escompté à 10 % d'escompte à intérêts composés à 9 222,98 DH. Quelle est sa date d'échéance ?

Formalisons le problème posé.
Calculer n si V = 9 750 DH, Va = 9 222,98 DH et t = 10 %.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10 % est, d'après la table financière T3, t_m = 0,797 %.

La relation (3.4) donne :
$Va = V\,(1 + t_m)^{-n} = 9\,222{,}98 = 9\,750 \times 1{,}00797^{-n}$
$1{,}00797^{-n} = 9\,222{,}98 / 9\,750 = 0{,}945947$

L'utilisation de la fonction logarithme permet de calculer n :
$n \log 1{,}00797 = - \log 0{,}945947$
$n = - \log 0{,}945947 / \log 1{,}00797 = 7$ mois.

L'utilisation de la table financière T2b permet aussi de trouver pour Va moyennant une interpolation linéaire.

Exercice 8.2.21. : Calcul de la Valeur d'un capital et du taux d'intérêts composés.

Un capital vaut 7 912,34 DH, dans 6 mois et 7 109,15 DH, il y a 6 mois. Quelle est la valeur de ce capital et quel est le taux d'intérêts ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C et t si VA = 7 912,34 DH, n_1 = 6 mois, Va = 7 109,15 DH et n_2 = 6 mois.

La relation (3.1) donne :

$VA = C(1 + t)^{+6} = 7\ 912{,}34$

$Va = C\ (1 + t)^{-6} = 7\ 109{,}15$

la division, membre à membre de ces deux égalités donne :

$(1 + t)^{12} = 1{,}112988$

Ceci donne exactement le taux annuel de placement du capital t = 11,30 % qui correspond à un taux mensuel équivalent, d'après la table financière T3, à : $t_m = 0{,}896$ %

Calculons le capital par les deux relations Va et VA :

Par VA : $C = 7\ 912{,}34 \times (1 + 0{,}00896)^{-6} = 7\ 500{,}00$ DH

Par Va : $C = 7\ 109{,}15 \times (1 + 0{,}00896)^{+6} = 7\ 500{,}00$ DH

On trouve le même résultat, pour peu que l'on dispose d'une calculette assez précise.

Exercice 8.2.22. : Calcul de la Valeur d'un capital et du taux d'intérêts composés.

Un capital rapporte, en 2 mois, 25,06 DH d'intérêts et, en 4 mois 50,38 DH. Quelle est la valeur de ce capital et quel est le taux d'intérêts ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C et t si I_1 = 25,06 DH, n_1 = 2 mois, I_2 = 50,38 DH et n_2 = 4 mois.

La relation (3.) donne :

$I_1 = C[(1 + t_m)^2 - 1] = 25,06$

$I_2 = C[(1 + t_m)^4 - 1] = 50,38$

la division, membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{(1+t_m)^4 - 1}{(1+t_m)^2 - 1} = \frac{50,38}{25,06} = 2,013751$$

Ce qui donne, après simplification :

$(1 + t_m)^4 - 2,013751\ (1 + t_m)^2 + 1,013751$

On pose $X = (1 + t_m)^2$ et donc $X^2 = (1 + t_m)^4$

$X^2 - 2,013751\ X + 1,013751 = 0$

La résolution de cette équation donne pour solution X > 1 :

$X = 1,012063 = (1 + t_m)^2 \Rightarrow t_m = 0,6013\ \%$ ce qui correspond à un taux annuel t = 7,46 %

Le calcul de la valeur du capital peut être fait maintenant :

C = 25,06 / 1,012063 = 2 077,43 DH.

Exercice 8.2.23. : Calcul de la valeur de l'annuité et du taux d'actualisation d'une suite d'annuités constantes.

ADIL épargne, à la fin de chaque année, une somme d'argent et ce pendant 4 années. La valeur actuelle de son épargne est 18 561,05 DH et sa valeur acquise est 22 087,66 DH. Quelle est la valeur de l'annuité et quel est le taux d'actualisation ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a et t si Va = 18 561,05 DH, VA = 22 087,66 DH et n = 4 années.

Les relations (4.1) et (4.3) donnent Va et VA :

$$\mathrm{Va} = a\,\frac{1-(1+t)^{-4}}{t} = 18\,561{,}05$$

$$\mathrm{VA} = a\,\frac{(1+t)^{4}-1}{t} = 22\,087{,}66$$

La division membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{(1+t)^{4}-1}{1-(1+t)^{-4}} = \frac{22\,087{,}66}{18\,561{,}05} = 1{,}19$$

On obtient, après avoir poser $X = (1 + t)^4$ et après simplification :

$$X^2 + 2{,}19\,X + 1{,}19 = 0$$

La résolution de cette équation donne pour solution X > 1 :

$X = (1 + t)^4 = 1{,}19$ ce qui donne t = 4,44 %

La valeur de l'annuité se déduit facilement, en utilisant la relation donnant VA ou celle donnant Va :

$$a = \frac{\mathrm{VA}\ t}{(1+t)^{4}-1} = 5\,167{,}46\ \mathrm{DH}$$

$$a = \frac{\mathrm{Va}\ t}{1-(1+t)^{-4}} = 5\,166{,}51\ \mathrm{DH}$$

La différence des deux résultats vient des différents arrondis de la calculette. Par précaution, on prendra, pour résultat, la moyenne arithmétique des deux valeurs, soit : 5 166,99 DH.

On aurait pu utiliser la relation : $V_A = (1 + t)^4 V_a$ pour obtenir directement :

$$\frac{22\,087{,}66}{18\,561{,}05} = 1{,}19 = (1+t)^4$$

Ce qui donne t = 4,44 %.

Exercice 8.2.24. : Calcul du nombre d'annuités et de la valeur de l'annuité d'une suite d'annuités constantes.

Une suite d'annuités de fin de période a une valeur actuelle de 15 311,67 DH et une valeur acquise de 39 510,66 DH.

Quel est le montant de l'annuité et le nombre d'annuités si le taux d'actualisation est 9 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a et n si Va = 15 311,67 DH, VA = 39 510,66 DH et t = 9 %.

Les relations (4.1) et (4.3) donnent Va et VA :

$$\mathrm{Va} = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 15\,311{,}67$$

$$\mathrm{VA} = a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t} = 39\,510{,}66$$

La division membre à membre de ces deux égalités donne :

$$\frac{(1+t)^{n}-1}{1-(1+t)^{-n}} = \frac{39\,510{,}66}{15\,311{,}67} = 2{,}58043$$

On obtient, après avoir poser $X = (1 + t)^n$ et après simplification :

$X^2 + 3{,}58043\, X + 2{,}58043 = 0$

La résolution de cette équation donne pour solution X > 1 :
$X = (1 + t)^n = 2{,}58043$ ce qui donne pour n = 11 ans.

La valeur de l'annuité se déduit facilement, en utilisant la relation donnant VA ou celle donnant Va :

$$a = \frac{VA\ t}{(1+t)^{11} - 1} = 2\ 250{,}00 \text{ DH}$$

$$a = \frac{Va\ t}{1 - (1+t)^{-11}} = 2\ 250{,}00 \text{ DH}$$

Ces calculs peuvent être effectués grâce aux tables financières T4a et T5a.

On aurait pu utiliser la relation :

$$\frac{VA}{Va} = \frac{39\,510{,}66}{15\,311{,}67} = 2{,}58\,043 = (1+t)^n$$

D'après la table financière T1a, on a pour t = 9 % et $(1 + t)^n$ = 2,58 043 on trouve n = 11 ans.

Exercice 8.2.25. : Calcul du taux d'actualisation d'une suite d'annuités constantes.

Une suite de 10 annuités de valeur 3 500,00 DH acquiert une valeur égale à 57 136,03 DH ; quel est le taux d'actualisation ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si VA = 57 136,03 DH et n = 10 ans.

Les relations (4.3) donne VA :

$$VA = 3\,500 \times \frac{(1+t)^{10} - 1}{t} = 57\,136{,}03 \text{ DH}$$

$$\frac{(1+t)^{10} - 1}{t} = 16{,}32458$$

Solution à l'aide des tables financières.

On utilise la table T54 pour n = 10 et l'on trouve, immédiatement, t = 10,50 %.

Solution algébrique.

La seule méthode pour résoudre algébriquement une telle équation est la méthode par tâtonnement. On essaie plusieurs valeurs pour t comme par exemple : 10 %, 11 %, 10,40 % etc jusqu'à 10,50 % qui est le résultat cherché.

Exercice 8.2.25. : Calcul du nombre d'annuités constantes.

Une suite d'annuités, de début de période et de valeur 3 400 DH, est actualisée à 10 %, l'an. Quel est le nombre d'annuités si la valeur acquise est 35 482,02 DH ?

Formalisons le problème posé.

Calculer n si a = 3 400 DH, VA = 35 482,02 DH et t = 10 %.

Les relations (4.4) donne VA :

$$VA = 3\,400 \times (1+t)\frac{(1+t)^{n} - 1}{t} = 35\,482{,}02 \text{ DH}$$

$1{,}1^{n} = 1{,}94872$

Solution à l'aide des tables financières.

On utilise la table T1a pour t = 1,10 et l'on trouve, immédiatement, n = 7 ans.

Solution algébrique.
$11^n = 1,94872 \Rightarrow n = (\log 1,94872) / (\log 1,1) = 7$ ans.

Exercice 8.2.26. : Calcul de la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes.

Si Mohamed décide d'épargner, à la fin de chaque mois 2 500 DH et ce pendant 13 mois. Quelle est la valeur acquise de son épargne si le taux d'actualisation est 10,20 % ?

Formalisons le problème posé.
Calculer VA si a = 2 500 DH, n = 13 et t = 10,20 %.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10,20 % est, d'après la table financière T3, $t_m = 0,813$ %.

Les relations (4.3) donne VA :

$$VA = 2\,500\,\frac{(1+t_m)^{13}-1}{t_m} = 2\,500\,\frac{1,00813^{13}-1}{0,00813} = 34\,133,43 \text{ DH}$$

Exercice 8.2.27. : Calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes.

Ahmed décide de placer, à la fin de chaque année, la somme de 3 750 DH ; quelle est la valeur actuelle des ses placements si le taux d'actualisation est 9,50 % et le nombre de placement est 7 ?

Formalisons le problème posé.
Calculer Va si a = 3 750 DH, n = 7 et t = 9,50 %.

La relation (4.1) donne :

$$Va = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 3\,750\,\frac{1-1,095^{-7}}{0,095} = 18\,561,05 \text{ DH}$$

En utilisant la table financière T4a, pour t = 9,50 % et n = 7 on trouve Va = 3 750 x 4,94961 = 18 561,04 DH ce qui le résultat trouvé par le calcul.

Exercice 8.2.28. : Calcul des valeurs acquises et actuelles d'une suite d'annuités non constantes.

Majid décide d'épargner, à la fin de chaque mois, des sommes d'argent, c'est ainsi, que pendant 5 mois, il économise 1 500 DH par mois, puis pendant 4 mois, il économise 1 900 DH par mois, et enfin pendant 11 mois, il économise 2 700 DH.

Quelle sont les valeurs actuelles et acquises de l'épargne de Majid si le taux d'actualisation est 10,30 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.

Calculer Va et VA si a_1 = 1 500 pour n_1 = 5 puis a_2 = 1 900 pour n_2 = 4 et a_3 = 2 700 pour n_3 = 11 et t = 10,30 %.

Attention, les sommes de la 1ère suite d'annuités démarrent le 1er mois, celles de la 2ème suite démarrent le 6ème mois et celles de la 3ème suite démarrent le 10ème mois. Il y a donc lieu de tenir compte de tout cela dans le calcul des valeurs actuelles et acquises.

Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10,30 % est, d'après la table financière T3, t_m = 0,820 %.

La relation (4.1) donne, Va pour les 3 suites d'annuités :

$$\mathrm{Va} = 1\,500\,\frac{1-1{,}0082^{-5}}{0{,}0082} + 1\,900\,\frac{1-1{,}0082^{-4}}{0{,}0082} \times 1{,}0082^{-5} +$$

$$+\,2\,700 \times \frac{1-1{,}0082^{-11}}{0{,}0082} \times 1{,}0082^{-9} = 40\,792{,}31\ \mathrm{DH}$$

Nous calculons, chaque fois, la valeur actuelle de la suite d'annuités et nous actualisons, après, à la date d'aujourd'hui, en multipliant par le facteur $(1{,}0082)^{-n}$

La relation (4.3) donne, VA pour les 3 suites d'annuités :

$$V_A = 1\,500\frac{1{,}0082^5 - 1}{0{,}0082} \times 1{,}0082^{15} + 1\,900\frac{1{,}0082^4 - 1}{0{,}0082} \times 1{,}0082^{11} +$$

$$+ 2\,700 \times \frac{1{,}0082^{11}}{0{,}0082} = 47\,982{,}86 \text{ DH}$$

Nous calculons, chaque fois, la valeur acquise de la suite d'annuités et nous actualisons, après, à la date du $20^{ème}$ mois, en multipliant par le facteur $(1{,}0082)^n$.

On aurait pu calculer VA à partir de Va par la relation (3.) :
VA = Va $(+ t_m)^{20}$ = 40 792,31 x $1{,}0082^{20}$ = 47 982,86 DH.

Exercice 8.2.29. : Calcul du taux d'actualisation d'une suite d'annuités constantes.

Une suite de mensualités de fin de périodes de valeur 4 150 DH a pour valeur actuelle 20 194,74 DH. Quel est le taux d'actualisation si le nombre de mensualités est 5 ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si a = 4 150 DH, Va = 20 194,74 DH et n = 5 mois.

La relation (4.1) donne :

$$Va = a\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 4\,150\frac{1-(1+t_m)^{-5}}{t_m} = 20\,194{,}74$$

$$y = \frac{1-(1+t_m)^{-5}}{t_m} = 4{,}86620$$

La table financière T4b donne pour n = 5 :
t_m = 0,900 % => y = 4,86778
t_m = 0,925 % => y = 4,86419
Donc pour Δt_m = 0,025 % => Δy = -0,00359
Ce qui donne pour Δy=-0,00158

$$\Delta t_m = 0{,}025 \frac{0{,}00158}{0{,}00359} = 0{,}0110$$

Et t_m = (0,900+0 011) % = 0,911 %
Ce qui correspond à un taux annuel t tel que $1 + t = (1 + t_m)^{12}$
Soit t = 11,50 %

Exercice 8.2.30. : Calcul de la valeur d'une annuité d'une suite d'annuités constantes.

Une suite de 5 annuités constantes de début de périodes a pour valeur acquise, au taux d'actualisation t = 9,70 %, 12 316,21 DH. Quelle est la valeur d'une annuité ?

Formalisons le problème posé.
Calculer a si Va = 12 316,21 DH, t = 9,70 % et n = 5 mois.

La relation (4.4) donne :

$$VA = a(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t} = 1{,}097a\frac{1{,}097^5 - 1}{0{,}097} = 12\ 316{,}21$$

$$a = 12316{,}21 \times \frac{0{,}097}{1{,}097 \times (1{,}097^5 - 1)} = 1\,850 \text{ DH}$$

Exercice 8.2.31. : Calcul du taux d'actualisation d'une suite d'annuités constantes.

Une suite de 7 annuités de 1 300 DH, de début de périodes, a pour valeur acquise 12 134,19 DH. Quel est le taux d'actualisation ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si a = 1 300 DH, VA = 12 134,19 DH et n = 7.

La relation (4.4) donne :

$$VA = a(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t} = 1300(1+t)\frac{(1+t)^7 - 1}{t} = 12\,134{,}19$$

$$y = (1+t)\frac{(1+t)^7 - 1}{t} = 9{,}33399$$

La seule méthode possible est le tâtonnement. On essaie plusieurs valeurs de t pour trouver y très proche de 9,33399.

t	6 %	7 %	7,25 %	7,20 %
y	8,89747	9,25980	9,35263	9,33399

On trouve donc t = 7,20 %.

Exercice 8.2.32. : Calcul de la valeur actuelle d'une suite d'annuités non constantes.

Ajil décide d'économiser, à la fin de chaque mois, les sommes d'argent suivantes : 1 250, 3 000, 500, 2 300, et 4 000 DH. Quelles sont la valeur actuelle et la valeur acquise de son épargne si le taux d'actualisation est de 6,50 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer Va et VA si a_1 + 1 250, a_2 = 3 000, a_3 = 500, a_4 = 2 300 et a_5 = 4 000 DH et t = 6,50 %.

Le taux d'intérêt équivalent au taux annuel de 6,50 % est, d'après la table financière T3, t_m = 0,526 %.

Pour calculer la valeur actuelle de la suite des 7 annuités, nous dressons le tableau suivant :

Epoque i	Mensualité	$A(1+t_m)^{-i}$
0	- - -	1 243,43
1	1 250,00	2 968,69
2	3 000,00	492,19
3	500,00	2 252,24
4	2 300,00	3 896,44
5	4 000,00	
Total		**10 853,02**

La relation générale utilisée est :

$$Va = \sum_{i=1}^{i=7} a_i (1+t_m)^{-i} = 1\,250 \text{ x } 1{,}00526^{-1} + 3\,000 \text{ x } 1{,}00526^{-2} + 500 \text{ x } 1{,}00526^{-3} + 2\,300 \text{ x } 1{,}00526^{-4} + 4\,000 \text{ x } 1{,}00526^{-5}$$

Le calcul de la valeur acquise, à partir de la valeur actuelle est immédiat :

$VA = Va \text{ x } (1 + t_m)^5 = 10\,853{,}02 \text{ x } 1{,}00526^5 = 11\,141{,}47$ DH

8.3. EXERCICES RELATIFS A LA PARTIE 3.

MATHEMATIQUES FINANCIERES APPROFONDIES.

Exercice 8.3.1. : Calcul de l'annuité d'un emprunt indivis.

Un industriel contracte, auprès de sa banque, un emprunt de 115 000 DH, remboursable en 15 mensualités constantes. Quelle est la valeur de la mensualité si le taux d'intérêts annuel est 9,70 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a, par annuités constantes si V = 115 000 DH, n = 15 et t = 9,70 %.

On doit calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9,70 %. D'après la table financière T3, on a t_m = 0,774 %

La relation (5.1) donne :

$$a = C \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-n}} = 115\,000 \frac{0{,}00774}{1-1{,}00774^{-15}} = 8149{,}93 \text{ DH}$$

On peut retrouver ce résultat grâce à la table financière T6b.

En effet, pour n = 15 et t_m = 0,775 %, on aura :

a = 0,07087 x 115 000 = 8 150,05 DH, ce qui est presque le résultat cherché. La différence vient de ce que nous avons utilisé, pour aller vite, t_m = 0,775 % au lieu de 0,774 %.

Exercice 8.3.2. : Calcul de l'annuité d'un emprunt indivis.

Un banquier accorde un crédit de 285 000 DH, au taux de 10,20 %, l'an.

Quelle est la valeur de la mensualité pour un remboursement en 12 mensualités constantes ?

Quelle est la valeur de la mensualité pour un remboursement par amortissements constante, en 12 mois ?

Quel mode de remboursement choisir et pourquoi ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a, par mensualités constantes et par amortissements constants si C = 285 000 DH, n = 12 mois et t = 10,20 %.

Quel mode de remboursement choisir ?

On calcule, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10,20 %. La table financière T3 donne t_m = 0,813 %.

Remboursement par mensualités constantes :
La relation (5.1) donne :

$$a = C \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-n}} = 285\,000 \frac{0{,}00813}{1-1{,}00813^{-12}} = 25\,023{,}70 \text{ DH}$$

La somme totale payée est 25 023,70x12 =300 284,40 DH

Remboursement par amortissements constants :
Le montant de la mensualité k est donné par la relation :
$a_k = m + t_m [C – (k - 1) m]$, avec m = C/n = 23 750 DH.

La somme totale payée est d'après la relation (5.5) :

$$S = C + \frac{(n+1)\, t_m\, C}{2} = 300\,060{,}83 \text{ DH}$$

Pour le calcul de S, dans le cas d'un remboursement par amortissements constants, on aurait pu dresser le tableau de remboursement.

On choisira le remboursement par amortissements constants car on paie, au total, légèrement moins que pour un remboursement pat mensualités constantes.

Exercice 8.3.3. : Choix entre deux emprunts indivis.

Jalil construit sa maison, il a besoin d'un crédit de 100 000 DH. Il a le choix entre deux modes de financement :

La banque : un prêt à 10 %, remboursable sur 12 mois, par mensualités constantes.

L'entreprise ou il travaille : un prêt à 11 %, remboursable, en 12 mois, par amortissements constants.

Que doit-il choisir entre la banque et l'entreprise où il travaille, si son critère de choix est un total à rembourser minimum ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a, par annuités constantes si C = 100 000 DH, n = 12 mois et t = 10 %.

Calculer a, par amortissement constant si C = 100 000 DH, n = 12 mois et t = 11 %, l'an.

Choisir entre les deux modes de financement.

Remboursement par mensualités constantes :

On calcule, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10 %. La table financière donne t_m = 0,797 %.

La relation (5.1) donne :

$$a = C \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-n}} = 100\,000 \frac{0{,}00797}{1-1{,}00797^{-12}} = 8\,771{,}32 \text{ DH}$$

La somme totale payée est 8 771,32 x 12 =105 255,84 DH

Remboursement par amortissements constants :

On calcule, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11 %. La table financière donne t_m = 0,873 %.

Le montant de la mensualité k est donné par la relation :

$a_k = m + t_m\,[C - (k - 1)\,m]$, avec m = C/n = 8 333,33 DH.

La somme totale payée est d'après la relation (5.5) :

$$S = C + \frac{(n+1)\,t_m\,C}{2} = 105\,694{,}00 \text{ DH}$$

Pour le calcul de S, dans le cas d'un remboursement par amortissements constants, on aurait pu dresser le tableau de remboursement.

On choisira le remboursement par mensualités constantes car on paie, au total, légèrement moins, que pour un remboursement pat amortissements constants.

Exercice 8.3.4. : Calcul de la l'annuité d'un emprunt indivis.

Une entreprise achète une machine à 150 000 DH et contracte, pour cela, un emprunt, sur 14 mois, au taux de 12,20 %, l'an, remboursable, par mensualités constantes.
Quelle est la valeur de la mensualité ?

Quel est le total des mensualités payées par l'entreprise ?

Faites les calculs à la machine à calculer et à l'aide des tables financières.

Formalisons le problème posé.

Calculer a, par annuités constantes, si C = 150 000 DH, n = 14 mois et t = 12,20 %.

Calculer le total payé.

On calcule, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12,20 %. La table financière donne t_m = 0,964 %.

Remboursement par mensualités constantes :

La relation (5.1) donne :

$$a = C \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-n}} = 150\,000 \frac{0{,}00964}{1-1{,}00964^{-14}} = 11\,505{,}03 \text{ DH}$$

La somme totale payée est 11 505,03 x 14 =161 070,42 DH

Retrouvons ces résultats grâce à la table financière T6b :

On a pour n = 14 et t_m = 0,950 % y = 0,07662

Pour n = 14 et t_m = 0,975 %, on a y = 0,07676

Donc pour Δt_m = 0,025 % on Δy = 0,00014

Ce qui donne pour Δt_m = 0,014 %

Δy = 0,00014 x 0,014/0,025 = 0,000078

Et a = 0,076698 x 150 000= 11 504,70 DH

Et la somme total payée S = 14 x 11 504,70 = 161 065,80 DH.

Ces résultats sont très voisins de ce que l'on a trouvé par la machine à calculer.

Exercice 8.3.5. : Calcul du montant d'un crédit indivis.

Un entrepreneur décide de contracter un emprunt, auprès de sa banque et demande de ne payer que 11 000 DH par mois.

Quel est le montant du crédit auquel il peut prétendre si le taux d'intérêts est 10,80 %, l'an et que la durée de remboursement est 15 mois ?

Que devient ce montant si la durée devient 18 mois ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C si a = 11 000 DH, n = 15 mois et t = 10,80 %.

Même question si n = 18 mois.

On calcule, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10,80 %. La table financière donne t_m = 0,858 %.

Remboursement par mensualités constantes :

La relation (4.1) donne :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 11\,000\,\frac{1-1{,}00858^{-15}}{0{,}00858} = 154\,204{,}46\text{ DH}.$$

Cette somme devient dans le cas de 18 mensualités :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 11\,000\,\frac{1-1{,}00858^{-18}}{0{,}00858} = 182\,744{,}11\text{ DH}.$$

Exercice 8.3.6. : Calcul du montant d'un prêt indivis.

Jawad achète une maison et la paie, à raison de 5 000 DH par mois, pendant 10 ans. Quel est le prix de cette maison si le taux d'intérêts est 11 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C si a = 5 000 DH, n = 120 mois et t = 11 %.

On calcule, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 11 %. La table financière donne t_m = 0,873 %.

Remboursement par mensualités constantes :

La relation (4.1) donne :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 5\,000\,\frac{1-1{,}00873^{-120}}{0{,}00873} = 370\,918{,}10\ \text{DH}\,.$$

Exercice 8.3.7. : Calcul du montant d'un prêt indivis.

Quel est le montant d'un prêt contracté par une entreprise qui doit payer 37 500 DH par mois, pendant 2 années, si le taux d'intérêts est 10,70 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.

Calculer C si a = 37 500 DH, n = 24 mois et t = 10,70 %.

On calcule, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10,70 %. La table financière donne t_m = 0,851 %.

Remboursement par mensualités constantes :

La relation (4.1) donne :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 37\,500\,\frac{1-1{,}00851^{-24}}{0{,}00851} = 810\,936{,}42\ \text{DH}\,.$$

Trouvons ce résultat par la table financière T4b, avec t_m = 0,851 % qui est très proche de 0,851 %.

La table T4b donne pour n = 24 et t_m = 0,850 % :

C = 21,62756 x 37 500 = 811 033,50 DH ce qui ne dépasse le résultat trouvé, grâce à la machine à calculer, que de 0,1 %.

Exercice 8.3.8. : Calcul du taux d'intérêts d'un emprunt indivis.

Jamal achète une voiture et le concessionnaire lui demande de payer, pendant 36 mois, la somme de 2 700 DH. Quel est le taux d'intérêt pratiqué par le concessionnaire, si le prix de la voiture, pour un paiement cash, est 85 000 DH ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si C = 85 000 DH, a = 2 700 DH et n = 36 mois.

La relation (4.1) donne :

$$C = a\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 2\,700\frac{1-(1+t_m)^{-36}}{t_m} = 85\,000{,}00 \text{ DH}.$$

Ce qui donne pour $y = \dfrac{1-(1+t_m)^{-36}}{t_m} = \dfrac{85\,000}{2\,700} = 31{,}48148$.

La table financière T4b donne, pour n = 36 et

y = 31,58530 pour t_m = 0,725 %

y = 31,44681 pour t_m = 0,750 %

Donc pour Δy = - 0,13849 on a Δt_m = 0,025 %

Soit pour Δy = - 0,10382 on aura

t_m = 0,025 x 0,10382 / 0,13849 = 0,01874

t_m = 0,725 + 0,0187 = 0,7437 % par mois

Ce qui donne comme taux annuel t = 9,30 %.

Nous pouvons vérifier nos calculs, en utilisant la relation (4.1) avec n = 36, t_m = 0,07438 % et a = 2 700 DH, on trouve :

$$C = a\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 2\,700\frac{1-1{,}007438^{-36}}{0{,}007438} = 84\,998{,}90 \text{ DH}.$$

Ce qui est très proche de 85 000 DH de l'énoncé.

Exercice 8.3.9. : Calcul du taux d'intérêts d'un emprunt indivis.

Un constructeur de voitures propose des automobiles à 110 000 DH cash ou avec un paiement, en 48 mois, à raison de 2 950 DH par mois.

Quel taux d'intérêts pratique-t-il ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t si C = 110 000 DH, n = 48 mois et a = 2 950 DH.

La relation (4.1) donne :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 2\,950\,\frac{1-(1+t_m)^{-48}}{t_m} = 110\,000{,}00 \text{ DH}.$$

Ce qui donne pour $y = \frac{1-(1+t_m)^{-48}}{t_m} = \frac{110\,000}{2\,950} = 37{,}288136$.

La table financière T4b donne, pour n = 48 et

y = 37,34424 pour t_m = 1,075 %

y = 37,13763 pour t_m = 1,100 %

Donc pour Δy = - 0,20661 on a Δt_m = 0,025 %

Soit pour Δy = - 0,056104 on aura

t_m = 0,025 x 0,056104 / 0,20661 = 0,0068

t_m = 1,075 + 0,0068 = 1,0817 % par mois

Ce qui donne comme taux annuel t = 13,78 %.

Nous pouvons vérifier nos calculs, en utilisant la relation (4.1) avec n = 48, t_m = 1,0817 % et a = 2 950 DH, on trouve :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 2\,950\,\frac{1-1{,}010817^{-48}}{0{,}010817} = 110\,001{,}69 \text{ DH}.$$

Ce qui est très proche de 110 000 DH de l'énoncé.

Exercice 8.3.10. : Calcul du taux d'intérêts d'un emprunt indivis.

Quel est le taux d'intérêt d'un emprunt indivis de 175 000 DH qu'on rembourse par mensualités constantes de 15 000 DH et ce pendant 12 mois ?

Formalisons le problème posé.
Calculer t si C = 175 000 DH, a = 15 000 DH et n = 12 mois.

La relation (4.1) donne :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 15\,000\,\frac{1-(1+t_m)^{-12}}{t_m} = 175\,000{,}00 \text{ DH}.$$

Ce qui donne $y = \frac{1-(1+t_m)^{-12}}{t_m} = \frac{175\,000}{15\,000} = 11{,}66667$.

La table financière T4b donne, pour n = 12 et
y = 11,67497 pour t_m = 0,425 %
y = 11,65625 pour t_m = 0,450 %
Donc pour Δy = - 0,01872 on a Δt_m = 0,025 %
Soit pour Δy = - 0,0083 on aura
t_m = 0,025 x 0,0083 / 0,01872 = 0,0111

t_m = 0,425 + 0,0111 = 0,4361 % par mois
Ce qui donne comme taux annuel t = 5,36 %.

Nous pouvons vérifier nos calculs, en utilisant la relation (4.1) avec n = 12, t_m = 0,436 % et a = 15 000 DH, on trouve :

$$C = a\,\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 15\,000\,\frac{1-1{,}004361^{-12}}{0{,}004361} = 174\,999{,}80 \text{ DH}$$

Ce qui est très proche de 175 000 DH de l'énoncé.

Exercice 8.3.11. : Calcul du taux d'intérêts et du montant d'un prêt indivis.

Un emprunt peut être remboursé de deux façons :

1- par 12 mensualités constantes de 4 303,32 DH chacune ;

2- par 15 mensualités constantes de 3 468,22 DH chacune.

Quels sont le taux d'intérêts et le montant de cet emprunt ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t et C si a_1 = 4 303,32 DH sur 12 mois ou a_2 = 3 468,22 DH sur 15 mois.

La relation (5.1) donne :

$$a_1 = C \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-12}} = 4\,303{,}32$$

$$a_2 = C \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-15}} = 3\,468{,}22$$

En divisant membre à membre ces deux relations, on trouve :

$$\frac{4\,303{,}32}{3\,468{,}22} = \frac{1-(1+t_m)^{-15}}{1-(1+t_m)^{-12}} = 1{,}240786$$

$(1 + t_m)^{-15} – 1{,}240786\ (1 + t_m)^{-12} + 0{,}240786 = 0$

En multipliant par $(1 + t_m)^{15}$ les deux membres de l'équation :

$y = 0{,}240786\ (1 + t_m)^{15} – 1{,}240786\ (1 + t_m)^{3} + 1 = 0$

Cette équation ne peut être résolue que par approximations successives. On essaie plusieurs valeurs de t_m pour que le 1^er^ membre y soit le plus proche possible de zéro.

On dresse donc le tableau suivant :

t_m	0,006	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050
y	0,000137	0,000062	0,000036	0,000011	-0,00000009

La valeur de t_m est très proche de 0,005 %, ce qui donne pour taux annuel t = 6,17 %.

La relation (4.1) donne le montant de l'emprunt :

$$C_1 = a_1 \frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 4303{,}32 \frac{1-1{,}005^{-12}}{0{,}005} = 49\,999{,}98 \text{ DH}.$$

$$C_2 = a_2 \frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = 3\,468{,}22 \frac{1-1{,}005^{-15}}{0{,}005} = 50\,000{,}03 \text{ DH}$$

On a fait exprès les calculs de deux façons, en utilisant a_1 puis a_2 pour prendre comme valeur de l'emprunt la moyenne arithmétique des deux résultats.

C = (C_1 + C_2) / 2 = 50 000 DH

Exercice 8.3.12. : Choix entre modes de remboursement d'un emprunt indivis.

Un concessionnaire propose, pour l'achat d'une voiture, dont le prix est 92 540,10 DH, deux possibilités de paiement :

1 - Paiement de 20 mensualités de 5 000 DH chacune ;

2 - Paiement par 30 mensualités de 3 507,68 DH chacune.

En supposant que le taux d'intérêt du marché soit 10 %, quel mode de paiement choisir ?

Il faut choisir le mode de paiement dont le taux d'intérêt est inférieur ou voisin de 10 %, l'an.

Formalisons le problème posé.

Calculer t_1 et t_2 si a_1 = 5 000 DH C= 92 540,10 et n_1 = 20 mois et a_2 = 3 507,68 DH et n_2 = 30 mois.

La relation (5.1) donne :

$$a_1 = 92\,540{,}10 \frac{t_{1m}}{1-(1+t_{1m})^{-20}} = 5\,000{,}00 \text{ DH}$$

$$a_2 = 92\,540{,}10 \; \frac{t_{2m}}{1-(1+t_{2m})^{-30}} = 3\,507{,}68 \text{ DH}$$

Ce qui donne : $\frac{t_{1m}}{1-(1+t_{1m})^{-20}} = 0{,}0540301$

Ce qui donne : $\frac{t_{2m}}{1-(1+t_{2m})^{-30}} = 0{,}0379044$

L'utilisation de la table financière T6b permet de trouver t_{1m} et t_{2m}, en effet pour :

n = 20 et y = 0,054030 on a t_{1m} = 0,0075 % soit t = 9,38 %

n = 30 et y = 0,037904 on a t_{2m} = 0,0085 % soit t = 10,69 %

On doit choisir le 1er mode de remboursement qui est à un taux d'intérêt de 9,38 % inférieur au taux en vigueur sur le marché.

Exercice 8.3.13. : Calcul du taux d'intérêt d'un emprunt indivis.

Un emprunt de 100 000 DH est remboursé en 10 mensualités de 10 502 DH chacune. Quel est le taux d'intérêt de cet emprunt ?

Que devient ce taux si le remboursement se fait en 12 mois, avec des mensualités constantes de 8 690 DH chacune ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t_1 et t_2 si a_1 = 10 502 DH C= 100 000 et n_1 = 10 mois et a_2 = 8 690 DH et n_2 = 12 mois.

La relation (5.1) donne :

$$a_1 = 100\,000 \; \frac{t_{1m}}{1-(1+t_{1m})^{-10}} = 10\,502{,}00 \text{ DH}$$

$$a_2 = 100\,000 \; \frac{t_{2m}}{1-(1+t_{2m})^{-12}} = 8\,690{,}00 \text{ DH}$$

Ce qui donne : $\frac{t_{1m}}{1-(1+t_{1m})^{-10}} = 0{,}10502$

Ce qui donne : $\frac{t_{2m}}{1-(1+t_{2m})^{-12}} = 0{,}08690$

L'utilisation de la table financière T6b permet de trouver t_{1m} et t_{2m} , en effet pour:

n = 10 et y = 0,10502 on a t_{1m} = 0,90 % soit t = 11,35 %.

n = 12 et y = 0,08690 on a t_{2m} = 0,65 % soit t = 8,085 %.

Exercice 8.3.14. : Calcul des annuités d'un emprunt indivis remboursé par amortissements constants.

Un emprunt de 250 000 DH est remboursé par amortissements constants en 10 mois. Calculer la valeur de chaque mensualité si le taux d'intérêt est 10,50 %, l'an ?

Calculer la somme totale remboursée.

Formalisons le problème posé.

Calculer a_k, pour un remboursement par amortissements constants, si C = 250 000 DH, n = 10 mois et t = 10,50 %.

Nous calculons, d'abord, le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10,50 %, la table financière T3 donne t_m = 0,836 %.

Nous pouvons, maintenant dresser le tableau de remboursement :

Epoques	**Amortissement**	**Capital restant dû**	**Intérêts**	**Annuités**
0	0	250 000		
1	25 000	225 000	2090,00	27 090
2	25 000	200 000	1881,00	26 881
3	25 000	175 000	1672,00	26 672
4	25 000	150 000	1463,00	26 463
5	25 000	125 000	1254,00	26 254
6	25 000	100 000	1045,00	26 045
7	25 000	75 000	836,00	25 836
8	25 000	50 000	627,00	25 627
9	25 000	25 000	418,00	25 418
10	25 000	0	209,00	25 209
Total	**250 000**	**- - -**	**11 495,00**	**261 495**

La somme totale remboursée est d'après le tableau :

S = 261 495,00 DH.

On peut retrouver ce résultat grâce à la relation (5.5) :

$$S = C + \frac{(n+1)\, t_m\, C}{2} = 261\,495\ \mathrm{DH}$$

Exercice 8.3.15. : Calcul de la valeur d'une mensualité et du taux d'intérêt d'un emprunt indivis.

Un emprunt d'une valeur de 58 453,71 DH est remboursé en 10 mensualités constantes.

La même mensualités peut servir à rembourser un emprunt de 122 076,72 DH en 20 mois.

Quelle est la valeur de cette mensualité et quel est le taux d'intérêt ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a et t si C_1 = 58 453,71 DH, n_1 = 10 mois, C_2 = 122 076,72 DH et n_2 = 20 mois.

La relation (5.1) donne pour les deux cas:

$$a = 58\,453{,}71 \, \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-10}}$$

$$a = 122\,076{,}72 \, \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-20}}$$

En divisant membre à membre les deux relations, on a :

$$\frac{1-(1+t_m)^{-20}}{1-(1+t_m)^{-10}} = \frac{122\,076{,}72}{58\,453{,}72} = 2{,}088434$$

$(1 + t_m)^{20} – 2{,}088434\ (1 + t_m)^{10} + 1{,}088434 = 0$

En posant $X = (1 + t_m)^{10}$ et donc $X^2 = (1 + t_m)^{20}$, l'équation devient :

$X^2 – 2{,}088434\ X + 1{,}088434 = 0$

La résolution de cette simple équation donne comme solution supérieure à 1 : $X = (1 + t_m)^{10} = 1{,}088434$

En utilisant la fonction logarithme, on trouve :

$10 \ln (1 + t_m) = \ln 1{,}088434$ soit : $\ln (1 + t_m) = 0{,}008474$

Ce qui donne pour t_m = 0,851 % soit t = 10,704 %, l'an.

Exercice 8.3.16. : Calcul des annuités d'un emprunt indivis remboursé par amortissements constants.

Un emprunt de 125 000 DH est remboursé en 8 ans par amortissements constants. Quelles sont les valeurs des 8 annuités sachant que le taux d'intérêt annuel est 9,50 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer les a_k, par amortissements constants, si C = 125 000 DH, t = 9,50 % et n = 8 ans.

Nous pouvons, directement dresser le tableau des remboursements.

Epoques	Amortissement	Capital restant dû	Intérêts	Annuités
0		125 000		
1	15 625	109 375	11 875,00	27 500,00
2	15 625	93 750	10 390,63	26 015,63
3	15 625	78 125	8 906,25	24 531,25
4	15 625	62 500	7 421,88	23 046,88
5	15 625	46 875	5 937,50	21 562,50
6	15 625	31 250	4 453,13	20 078,13
7	15 625	15 625	2 968,75	18 593,75
8	15 625	0	1 484,38	17 109,38
Total	**125 000**	**- - -**	**53 437,52**	**178 437,52**

Le calcul direct de la somme totale payée donne, d'après la relation (5.5) :

S = C [1 + (n + 1) t / 2] = 178 437,50 DH

Exercice 8.3.17. : Calcul d'annuités pour le remboursement d'un emprunt indivis.

Un emprunt de 150 000 DH est remboursé en 6 annuités dont les 5 premières sont successivement : 30 000 ; 32 000 ; 33 000 ; 29 000 et 31 000 DH. Quel est le montant de la dernière annuité sachant que le taux d'intérêt annuel est 10 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a_6 si a_1 = 30 000, a_2 = 32 000, a_3 = 33 000, a_4 = 29 000 et a_5 = 31 000 DH et t = 10 % et C = 150 000 DH.

Nous avons affaire, ici, à un remboursement quelconque, ni par annuités constantes, ni par amortissements constants.

En dressant le tableau de remboursement, nous veillerons à ce que chaque annuité serve à payer les intérêts de la période et à couvrir, avec le reste, une partie de l'amortissement du capital emprunté.

Dressons, maintenant le tableau de remboursement.

Epoques	Annuités	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement
0		150 000,00		
1	30 000,00	135 000,00	15 000,00	15 000,00
2	32 000,00	116 500,00	13 500,00	18 500,00
3	33 000,00	95 150,00	11 650,00	21 350,00
4	29 000,00	75 665,00	9 515,00	19 485,00
5	31 000,00	52 231,50	7 566,50	23 433,50
6	57 454,65	0,00	5 223,15	52 231,50
Total	**212 454,65**	**- - -**	**62 455,00**	**150 000,00**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque période, on calcule les intérêts, on les déduit de l'annuité pour trouver le montant de l'amortissement ce qui nous permet de calculer le montant du capital restant dû, et ainsi de suite, jusqu'à la $6^{ème}$ période.

Exercice 8.3.18. : Calcul du tableau de remboursement d'un emprunt indivis.

Une entreprise contracte un emprunt de 150 000 DH, au taux de 10,50 %, l'an, remboursable en 7 mensualités. Compte tenu des prévisions de sa trésorerie, elle décide de payer 25 000 DH par mois, pendant 6 mois. Quel est le montant de la dernière mensualité ?

Formalisons le problème posé.

Calculer a_7 si a_i = 25 000 DH pour i = 1 à 6, C = 150 000 DH, t = 10,50 % et n = 7 mois.

Nous avons affaire, ici, à un remboursement quelconque. En effet, il ne s'agit ni d'un remboursement par annuités constantes, du fait que la dernière annuité est foncièrement différente des 6 premières, ni d'un remboursement par amortissements constants.

En dressant le tableau de remboursement, nous veillerons à ce que chaque annuité serve à payer les intérêts de la période et à couvrir, avec le reste, une partie de l'amortissement du capital emprunté.

Nous calculons, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10,50 %. La table T3 donne t_m = 0,836 %.

Dressons, maintenant le tableau de remboursement.

Epoques	Annuités	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement
0		150 000,00		
1	25 000,00	126 254,00	1 254,00	23 746,00
2	25 000,00	102 309,48	1 055,48	23 944,52
3	25 000,00	78 164,79	855,31	24 144,69
4	25 000,00	53 818,25	653,46	24 346,54
5	25 000,00	29 268,17	449,92	24 550,08
6	25 000,00	4 512,85	244,68	24 755,32
7	4 550,58	4 512,85	37,73	4 512,85
Total	**154 550,58**	**- - -**	**4 550,58**	**150 000,00**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque période, on calcule les intérêts, on les déduit de l'annuité pour trouver le montant de l'amortissement ce qui nous permet de calculer le montant du capital restant dû, et ainsi de suite, jusqu'à la 7ème période.

Exercice 8.3.19. : Calcul du taux d'intérêt réel d'un emprunt indivis.

Une entreprise contracte un emprunt de 175 000 DH remboursable en 12 mensualités constantes. Les frais d'étude du dossier s'élèvent à 2 500 DH, les frais d'hypothèque sont de 0,40 % du montant de l'emprunt et les frais de retrait automatique sont de 12 DH / mois.

Quel est le taux d'intérêt réel de cet emprunt sachant que ce dernier a été négocié à 9,20 % ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t_r si C = 175 000 DH, n = 12 mois, t = 9,20 %, F_0 = 2 500 + 700 et F_p = 12 DH / mois.

Nous calculons, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9,20 %. La table T3 donne t_m = 0,736 %.

La relation (5.1bis) donne le taux réel :

$$a + F_p = \frac{(C - F_0)t_r}{1 - (1 + t_r)^{-n}}$$

Il nous faut calculer la valeur a d'une annuité, la relation (5.1) donne :

$$a = C \frac{t_m}{1 - (1 + t_m)^{-n}} = 175\,000 \frac{0{,}00736}{1 - 1{,}00736^{-12}} = 15\,290{,}38 \text{ DH}$$

l'utilisation de la relation (5.1bis) donne :

$$\frac{t_r}{1 - (1 + t_r)^{-12}} = \frac{a + F_p}{C - F_0} = \frac{15\,290{,}38 + 12}{175\,000 - 3\,200} = 0{,}0890709$$

La table T6b donne pour n = 12

Pour t_r = 1,025 % y = 0,08899

Pour t_r = 1,050 % y = 0,08913

Pour Δt_r = 0,025 % on a Δy = 0,00014

Donc pour Δy = 0,000081

On aura $\Delta t_r = 0{,}025 \frac{0{,}000081}{0{,}00014} = 0{,}0144\%$

et t_r = 1,0394 % ce qui donne un taux annuel t = 13,21 %.

On voit bien que les différents frais augmentent le taux d'intérêt.

Exercice 8.3.20. : Calcul du taux d'intérêt réel d'un emprunt indivis.

Un emprunt de 95 000 DH remboursable en 10 mensualités a été accordé moyennant des frais d'étude du dossier de 1 500 DH. Quel est le taux d'intérêt réel si le taux négocié est 10 %, l'an ?

Formalisons le problème posé.

Calculer t_r si C = 95 000 DH, n = 10 mois, t = 10 %, F_0 = 1 500 DH.

Nous calculons, d'abord le taux mensuel équivalent au taux annuel de 10 %. La table T3 donne t_m = 0,797 %.

La relation (5.1bis) donne le taux réel :

$$a = \frac{(C - F_0)t_r}{1 - (1 + t_r)^{-n}}$$

Il nous faut calculer la valeur a d'une annuité, la relation (5.1) donne :

$$a = C\frac{t_m}{1 - (1 + t_m)^{-n}} = 95\,000\frac{0{,}00797}{1 - 1{,}00797^{-10}} = 9\,921{,}39 \text{ DH}$$

l'utilisation de la relation (5.1bis) donne :

$$\frac{t_r}{1 - (1 + t_r)^{-10}} = \frac{a}{C - F_0} = \frac{9\,921{,}39}{95\,000 - 1\,500} = 0{,}106111$$

La table T6b donne pour n = 10

Pour t_r = 1,075 % y = 0,10601

Pour t_r = 1,100 % y = 0,10615

Pour Δt_r = 0,025 % on a Δy = 0,00014

Donc pour Δy = 0,00011

On aura $\Delta t_r = 0{,}025\dfrac{0{,}00011}{0{,}00014} = 0{,}0196\,\%$

Et t_r = 1,0946 % ce qui donne un taux annuel t = 13,96 %.

On voit bien que le simple fait d'exiger 1 500 DH de frais de dossier, augmente de presque 4 % le taux d'intérêt.

Exercice 8.3.21. : Calcul du tableau de remboursement d'un emprunt obligataire, au pair.

Le CIH lance un emprunt obligataire de 750 000 de titres de valeur nominale 150 DH, remboursable en 10 ans au taux d'intérêt de 9,50 %.

Le remboursement du titre se fait à sa valeur d'émission.

Dresser le tableau de remboursement, au pair et par annuités constantes, de cet emprunt.

Formalisons le problème posé.

Dresser les tableaux de remboursement, au pair et par annuités constantes, si N = 750 000, V = 150 DH, t = 9,50 % et n = 10 ans.

La relation (5.7b) donne M_1 :

$$M_1 = N\frac{t}{(1+t)^n - 1} = \frac{750\,000 \times 0{,}095}{1{,}095^{10} - 1} = 48\,200 \text{ titres}$$

La relation (5.7c) permet de calculer la valeur de l'annuité A.

$$A = NV\frac{t}{1-(1+t)^{-10}} = \frac{750\,000 \times 150 \times 0{,}095}{1-1{,}095^{-10}} = 17\,917\,442{,}06 \text{ DH}$$

La relation (5.7a) permet, maintenant de dresser le tableau de remboursement.

Ans	Nombre de titres amortis	Nombre de titres restant	Montants amortis dans l'année	Intérêts payés pour l'année
0		750 000		
1	48 200	701 800	7 230 000	10 687 442,06
2	52 779	649 021	7 916 850	10 000 592,06
3	57 793	591 228	8 668 950	9 248 492,06
4	63 283	527 945	9 492 450	8 424 992,06
5	69 295	458 650	10 394 250	7 523 192,06
6	75 878	382 772	11 381 700	6 535 742,06
7	83 087	299 685	12 463 050	5 454 392,06
8	90 980	208 705	13 647 000	4 270 442,06
9	99 623	109082	14 943 450	2 973 992,06
10	109 082	0	16 362 300	1 555 142,06
Total	**750 000**	**- - -**	**112 500 000**	**66 674 420,60**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque année, on calcule le nombre de titres amortis, grâce à la relation (5.7a), on calcule, ensuite, le nombre de titres restant et les montants amortis, à la fin de chaque année ; enfin, nous calculons les intérêts payés, chaque année, en ôtant du montant de l'annuité le montant amorti, pendant l'année considérée.

Exercice 8.3.22. : Calcul du tableau de remboursement d'un emprunt obligataire, au pair.

On reprend l'énoncé de l'exercice 8.3.21.

Dresser le tableau de remboursement, au pair et par amortissements constants, de l'emprunt lancé par le CIH.

Formalisons le problème posé.

Dresser les tableaux de remboursement, au pair et par amortissements constants, si N = 750 000, V = 150 DH, t = 9,50 % et n = 10 ans.

La relation (5.8a) donne M = N / n = 750 000 / 10 = 75 000

La relation (5.8b) donne les valeurs des annuités :

$$A_{k+1} = A_k - \frac{N\,V\,t}{n} = A_k - \frac{750000 \times 150 \times 0{,}095}{10} = A_k - 1068750$$

Dressons le tableau de remboursement :

Ans	Titres amortis	Titres non amortis	Montants restant dus	Intérêts payés pour l'année	Montant de l'annuité
0		750 000	112 500 000		
1	75 000	675 000	10 125 000	10 687 500	21 937 500
2	75 000	600 000	9 000 000	9 618 750	20 868 750
3	75 000	525 000	7 875 000	8 550 000	19 800 000
4	75 000	450 000	6 750 000	7 481 000	18 731 250
5	75 000	375 000	5 625 000	6 412 500	17 662 500
6	75 000	300 000	4 500 000	5 343 750	16 593 750
7	75 000	225 000	3 375 000	4 275 000	15 525 000
8	75 000	150 000	2 250 000	3 206 250	14 456 250
9	75 000	75 000	1 125 000	2 137 500	13 387 500
10	75 000	0	0	1 068 750	12 318 750
Total	**750 000**	**- - -**	**- - -**	**58 781 250**	**171 281 250**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque année, on calcule le nombre de titres non amortis, de là, on déduit les montants restant dus, après quoi, les intérêts dus, auxquels on ajoute le montant amorti pour trouver la valeur de l'annuité.

Remarque : On vérifie que pour chaque année :
(Amortissement = 75 000 x 150) + Intérêts = Annuité
et que $A_{k+1} = A_k - 1\,068\,750$

Le montant amorti, chaque année, est 75 000 x 150 = 1 125 000 DH.

Exercice 8.3.23. : Calcul du tableau de remboursement d'un emprunt obligataire, au pair.

La SGMB lance un emprunt obligataire de 50 000 titres de 250 DH chacun, pour une durée de 6 ans au taux de 8 %, l'an.

Le remboursement du titre se fait à sa valeur d'émission.

Dresser le tableau de remboursement, au pair et par annuités constantes, de cet emprunt.

Formalisons le problème posé.

Dresser les tableaux de remboursement, au pair et par annuités constantes, si N = 50 000, V = 250 DH, t = 8 % et n = 6 ans.

La relation (5.7b) donne M_1 :

$$M_1 = N\frac{t}{(1+t)^n - 1} = \frac{50\,000 \times 0{,}08}{1{,}08^6 - 1} = 6\,816 \text{ titres}$$

La relation (5.7c) permet de calculer la valeur de l'annuité A.

$$A = NV\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = \frac{50\,000 \times 250 \times 0{,}08}{1 - 1{,}08^{-6}} = 2\,703\,942{,}33 \text{ DH}$$

La relation (5.7a) permet, maintenant de dresser le tableau de remboursement.

Ans	Nombre de titres amortis	Nombre de titres restant	Montants amortis dans l'année	Intérêts payés pour l'année
0		50 000		
1	6 816	43 184	1 704 000	999 942,33
2	7 361	35 823	1 840 250	863 692 ,33
3	7 950	27 873	1 987 500	716 442,33
4	8 586	19 287	2 146 500	557 442,33
5	9 273	10 014	2 318 250	385 692,33
6	10 014	0	2 503 500	200 442,33
Total	**50 000**	**- - -**	**12 500 000**	**3 723 653,98**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque année, on calcule le nombre de titres amortis, grâce à la relation (5.7a), on calcule, ensuite, le nombre de titres restant et les montants amortis, à la fin de chaque année ; enfin, nous calculons les intérêts payés, chaque année, en ôtant du montant de l'annuité le montant amorti, pendant l'année considérée.

Exercice 8.3.24. : Calcul du tableau de remboursement d'un emprunt obligataire, au pair.

On reprend l'énoncé de l'exercice 8.3.23.

Dresser le tableau de remboursement, au pair et par amortissements constants, de l'emprunt lancé par la SGMB.

Formalisons le problème posé.

Dresser les tableaux de remboursement, au pair et par amortissements constants, si N = 50 000, V = 250 DH, t = 8 % et n = 6 ans.

La relation (5.8a) donne M = N / n = 50 000 / 6 = 8 333 titres
La relation (5.8b) donne les valeurs des annuités :

$$A_{k+1} = A_k - \frac{N\,V\,t}{n} = A_k - \frac{50000 \times 250 \times 0{,}08}{6} = A_k - 166\,666{,}67$$

Remarque : La relation $A_{k+1} = A_k - 166\ 666{,}67$ n'est pas vérifiée pour la colonne "Montant de l'annuité" d'une manière exacte à cause de l'arrondi du nombre des titres 8333 au lieu de 8 333,3 333.

En effet, les annuités exécutées avec cette relation sont :

308 3250 – 2 916 583,33 – 274 9916,66 – 258 3249,9 – 241 6583,32 – 2 249 916,65

Dressons le tableau de remboursement :

Ans	**Titres amortis**	**Titres non amortis**	**Montants restant dus**	**Intérêts payés pour l'année**	**Montant de l'annuité**
0		50 000	12 500 000		
1	8 333	41 667	10 416 750	1 000 000	3 083 250
2	8 333	33 334	8 333 500	833 340	2 916 590
3	8 333	25 001	6 250 250	666 680	2 749 930
4	8 333	16 668	4 167 000	500 020	2 583 270
5	8 333	8 335	2 083 750	333 360	2 416 610
6	8 335	0	0	166 700	2 250450
Total	**50 000**	**- - -**	**- - -**	**3 500 100**	**16 000 100**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque année, on calcule le nombre de titres non amortis, de là, on déduit les montants restant dus, après quoi, les intérêts dus, auxquels on ajoute le montant amorti pour trouver la valeur de l'annuité.

Le montant amorti, chaque année, est 8 333 x 250 = 2 083 250 DH, sauf pour la dernière année où ce montant est 8 335 x 250 = 2 083 750 DH.

Exercice 8.3.25. : Calcul du tableau de remboursement d'un emprunt obligataire, au-dessus du pair.

La société Eqdom lance un emprunt obligataire de 100 000 titres de valeur nominale 125 DH, sur 5 ans, au taux d'intérêt de 9 %.

La valeur de remboursement du titre est 130 DH.

Dresser le tableau de remboursement, au pair et par annuités constantes, de cet emprunt.

Formalisons le problème posé.

Dresser les tableaux de remboursement, au-dessus du pair et par annuités constantes, si N = 100 000, V = 125 DH, R = 130 DH, t = 9 % et n = 5 ans.

Calculons r = Vt / R = 0,0865385.

La relation (5.9b) donne M_1 :

$$M_1 = N \frac{r}{(1+r)^n - 1} \frac{100\,000 \text{ x } 0{,}0\,865\,385}{1{,}0\,865\,385^5 - 1} = 16\,825 \text{ titres}$$

La relation (5.9c) permet de calculer la valeur de l'annuité A.

$$A = NR \frac{r}{1-(1+t)^{-n}} = \frac{100\,000 \text{ x } 130 \text{ x } 0{,}0\,865\,385}{1 - 1{,}0\,865\,385^{-5}} = 3\,184\,844{,}15 \text{ DH}$$

La relation (5.9a) permet, maintenant de dresser le tableau de remboursement.

Ans	Nombre de titres amortis	Nombre de titres restant	Montants amortis dans l'a nnée	Intérêts payés pour l'année
0		100 000	-	
1	16 825	83 175	2 103 125	1 125 000,00
2	18 281	64 844	2 285 125	935 718,75
3	19 863	45 031	2 482 875	730 057,50
4	21 582	23 444	2 697 750	506 598,75
5	23 449	0	2 931 125	263 801,25
Total	**100 000**	**-**	**12 500 000**	**3 561 176,25**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque année, on calcule le nombre de titres amortis, grâce à la relation (5.7a), on calcule, ensuite, le nombre de titres restant et les montants amortis, à la fin de chaque année ; enfin, nous calculons les intérêts payés, chaque année, en ôtant du montant de l'annuité le montant amorti, pendant l'année considérée.

Exercice 8.3.26. : Calcul du tableau de remboursement d'un emprunt obligataire, au-dessus du pair.

On reprend l'énoncé de l'exercice 8.3.25.

Dresser le tableau de remboursement, au pair et par amortissements constants, de l'emprunt lancé par la société Eqdom.

Formalisons le problème posé.

Dresser les tableaux de remboursement, au pair et par amortissements constants, si N = 100 000, V = 125 DH, R = 130 DH, t = 9 % et n = 5 ans.

Calculons r = Vt / R = 0,0865385.

La relation (5.10a) donne M = N/n = 100 000/5 = 20 000 titres

La relation (5.10b) donne les valeurs des annuités :

$$A_{k+1} = A_k - \frac{N\,R\,r}{n} = A_k - \frac{100000 \times 130 \times 0{,}0865385}{5}$$
$$= A_k - 225\,000{,}10$$

Dressons le tableau de remboursement :

Ans	Titres amortis	Titres non amortis	Montants restant dus	Intérêts payés pour l'année	Montant de l'annuité
0		100 000	12 500 000		
1	20 000	80 000	10 000 000	1 125 000	3 725 000
2	20 000	60 000	7 500 000	900 000	3 500 000
3	20 000	40 000	5 000 000	675 000	3 275 000
4	20 000	20 000	2 500 000	450 000	3 050 000
5	20 000	0	0	225 000	2 825 000
Total	**100 000**	**- - -**	**- - -**	**3 375 000**	**16 375 000**

La méthode de calcul est la suivante : Pour chaque année, on calcule le nombre de titres non amortis, de là, on déduit les montants restant dus, après quoi, les intérêts dus, auxquels on ajoute le montant des titres amortis, au prix de remboursement d'un titre, pour trouver la valeur de l'annuité.

Le montant des titres amortis, chaque année, est, au prix de remboursement 20 000 x 130 = 2 600 000 DH.

Remarque : La colonne 6 vérifie la relation $A_{k+1} = A_k -$ 225 000 d'une manière exacte, parce qu'on arrondit 225 000,01 à 225 000.

Exercice 8.3.27. : Rentabilité d'un investissement.

Un industriel envisage d'investir dans l'achat de machines pour un montant de 2 500 000 DH. La marge nette dégagée par la production de ces machines pendant, les 10 années, durée d'amortissement des machines est estimée à 400 000 DH/an.

Montrer si l'investissement est rentable avec un taux d'actualisation de 9 % l'an.

Formalisons le problème posé.

Comparer 2 500 000 DH à la valeur actuelle de 10 annuités de 400 000 DH chacune sachant que t = 9 % l'an.

Pour ce faire nous optons pour la méthode du gain.

Calculons la valeur actuelle des 10 annuités de marge nette, la relation (4.1) donne

$$Va = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

La table T4a donne pour t = 9 % et n = 10 : 6,41 766

Va = 6,41 766 x 400 000 = 2 567 064 DH

Ce qui montre que l'investissement est rentable.

Exercice 8.3.28. : Rentabilité d'un investissement.

On décide d'investir 2 500 000 DH en contractant un emprunt sur 5 ans au taux d'intérêt de 10,5 % l'an.

L'équipement acheté a une durée technique d'amortissement égale à 10 ans.

Cet investissement est décidé sur la base d'un marché assuré, pour l'entreprise, durant 7 ans seulement, telle que la recette permet un cash flow relatif à cet investissement de 500 000 DH/an.

Montrer si l'investissement est rentable.

Formalisons le problème posé.

Montrer si l'investissement de 2 500 000 DH est rentable si n = 7, t = 10,5 % et CF = 500 000 DH/an.

Remarquons dès maintenant que cet exercice peut être résolu de 2 façons, toutes différentes.

1ère méthode : on considère l'investissement réalisé pour 7 ans seulement, tel que formulé plus haut

Pour montrer si l'investissement est rentable il suffit de comparer 1 750 000 DH à la valeur actuelle des 7 annuités de cash flow.

La relation (4.1) donne

$$Va = a\,\frac{1-(1+t)^{n}}{t}$$

La table T4a donne pour t = 10,5 % et n = 7 : 4,789 30

Va = 4,789 30 x 500 000 = 2 394 650 DH

L'investissement n'est pas rentable, parce que son montant dépasse la valeur actuelle des cash flow escomptés.

2ème méthode : on considère l'investissement réalisé pour 10 ans avec un cash flow de 500 000 DH/an pendant 7 ans et 0 DH/an pendant les 3 années suivantes.

Cette 2ème façon introduit une autre donnée, à savoir qu'après 7 ans, le matériel vaudra sa valeur vénale que l'on peut calculer comme suit :

On suppose le montant de l'investissement 2 500 000 DH comme étant la valeur actuelle des 10 amortissements m donnés par la relation (4.1).

$$Va = 2\,500\,000 = m \,.\, \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Dans la quelle $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ vaut 6,014 77 pour t = 10,5 % et n = 10

Ce qui donne pour m = 415 643,40 DH

La valeur actuelle Va des 3 derniers amortissements (le 8ème, le 9ème et le 10ème) est justement la valeur actuelle de la valeur vénale des machines.

Va = 415 643,49 [$(1 + t)^{-8} + (1 + t)^{-9} + (1 + t)^{-10}$]
= 415 643,49 x 1,225 47 = 509 358,62 DH

Le prix des machines restant pour les 7 années est donc 250 000,00 – 509 358,62 = 199 064 1,40 DH

L'investissement devient rentable car son montant est inférieur à la valeur actuelle des cash flow escomptés.

En diminuant la valeur actuelle du montant des machines, on donne plus de chance à l'investissement d'être rentable.

Remarque : Nous n'avons pas tenu compte des calculs de remboursement du prêt de 1 750 000 DH sur 5 ans en taux de 10,5 puisque dans tous les cas la valeur actuelle des n annuités a un taux t est toujours égale à 1 750 000 DH et la solution du problème consiste à comparer des valeurs actuelles.

8.3.29. : Rentabilité d'un investissement.

Montrer qu'un investissement est rentable si son montant est 500 000 DH et que ses cash flow sur 4 ans sont successivement de 100 000 DH, 150 000 DH, 160 000 DH et 250 000 DH.

Le taux d'actualisation est 10 %.

Formalisons le problème posé.

Calculer le gain G de l'investissement I = 500 000 DH si CF_1 = 100 000, CF_2 = 150 000 DH, CF_3 = 150 000, CF_4 = 250 000 DH, n = 4 et t = 10 %.

Pour ce faire nous dressons le tableau du gain.

Epoques	Dépenses/cash flow	Actualisation à 10 %
0	- 500 000,00	- 500 000,00
1	+ 100 000,00	90 909,09
2	+ 150 000,00	123 966,94
3	+ 160 000,00	120 210,37
4	+ 150 000,00	170 753,37
Total	**-**	**58 39,77**

Ce gain total étant positif, l'investissement est donc rentable.

Exercice 8.3.30. : Comparaison entre deux investissements.

Choisir entre les deux investissements suivants :

1- I = 1 000 000 DH ; CF = 300 000 DH/an sur 6 ans

2- I = 1 300 000 DH ; CF = 400 000 DH/an sur 5 ans

Le taux d'actualisation est égal au taux d'intérêt, soit 10 % l'an.

Formalisons le problème posé.

Voir énoncé.

Pour cette comparaison, nous proposons de comparer les gains et les TIR des deux investissements et de décider après.

Comparaisons les gains des deux investissements :

Pour ce faire on adresse le tableau suivant :

Epoque	1er investissement		2ème investissement	
	Dépenses Cash flow	Actualisation	Dépenses Cash flow	Actualisation
0	- 1 000 000	- 1 000 000,00	- 1 300 000	- 1 300 000,00
1	+ 300 000	+ 272 727,27	+ 400 000	+ 363 636,36
2	+ 300 000	+ 247 933,87	+ 400 000	+ 330 578,50
3	+ 300 000	+ 225 394,42	+ 400 000	+ 300 525,90
4	+ 300 000	+ 204 904,01	+ 400 000	+ 273 205,36
5	+ 300 000	+ 186 276,37	+ 400 000	+ 248 368,50
6	+ 300 000	+ 169 342,15	-	-
Total	-	+ 306 578,00	-	+ 216 314,60

Au vue du gain de chaque investissement, le 1er investissement est le plus rentable.

Comparaison des TIR des deux investissement.

Pour ce faire on adresse les deux tableaux suivants :

Calcul du TIR du 1er investissement

Epoques	t = 14 %	t = 16 %	t = 15,2 %	t = 15,3 %
0	- 1 000 000,00	- 1 000 000,00	- 1 000 000,00	- 1 000 000,00
1	+ 263 157,87	+ 258 620,67	+ 260 426,65	+ 260 190,78
2	+ 230 840,21	+ 222 948,83	+ 226 056,10	+ 225 664,13
3	+ 202 491,39	+ 192 197,25	+ 196 229,24	+ 195 719,08
4	+ 177 624,00	+ 165 687,27	+ 170 337,87	+ 169 747,66
5	+ 155 810,51	+ 142 833,87	+ 147 862,72	+ 147 222,58
6	+ 136 675,87			
Total	**166 599,70**	**- 17 712,50**	**+ 902,50**	**- 1 499,80**

Le TIR du 1er investissement se situe entre 15,2 et 15,3 % soit :

pour Δt = 0,1 % on a ΔG = - 2 358,30

donc pour ΔG = - 902,50 on aura

$$\Delta t = 0{,}1\,\% \, . \, \frac{902{,}50}{2\,358{,}30} = 0{,}04\,\%$$ d'où TIR_1 = 15,24 %.

Calcul du TIR du 2ème investissement

Epoques	t = 15 %	t = 16 %	t = 16,3 %	t = 16,4 %
0	- 1 300 000,00	- 1 300 000,00	- 1 300 000,00	- 1 300 000,00
1	+ 347 826,08	+ 344 827,56	+ 343 938,08	+ 343 642,60
2	+ 302 457,45	+ 297 265,11	+ 295 733,50	+ 295 225,59
3	+ 263 006,47	+ 256 263,00	+ 254 285,03	+ 253 630,22
4	+ 225 701,27	+ 220 916,36	+ 218 645,76	+ 217 895,37
5	+ 198 870,66	+ 190 445,12	+ 188 001,50	+ 187 195,32
Gain	**+ 40 861,30**	**+ 9 717,10**	**+ 603,80**	**- 2 411,00**

Le TIR de 2ème investissement se situe entre 16,3 et 16,4 % soit : pour Δt = 0,1 % on a ΔG = - 3 014,8

donc pour ΔG = - 603,80

on aura $$\Delta t = 0{,}1\,\% \text{ x } \frac{603{,}80}{3\,014{,}80} = 0{,}02\,\%$$

d'ou TIR_2 = 16,32 %.

Au vue du TIR, on doit choisir le 2ème investissement.

Discussion : voilà un cas où

selon le critère du gain on doit choisir le 1er investissement
selon le critère de TIR on doit choisir le 2ème investissement

Cependant l'usage veut que l'on privilégie le critère du TIR et donc on doit choisir le 2ème investissement.

Exercice 8.3.31. : Rentabilité d'un investissement.

On investit dans l'achat de machines pour un montant financé sur 5 ans et remboursable selon des trimestrialités de 250 000 DH avec un taux d'intérêt de 9 % l'an.

Cet investissement donne un cash flow annuel de 1 200 000 DH sur une période de 5 ans qui est la durée de l'amortissement technique des machines.

Montrer si cet investissement est rentable.

Formalisons le problème posé.

Montrer si l'investissement est rentable avec CF = 1 200 000 DH/an, t = 9 % l'an, n = 5 ans et

Pour ce faire nous optons pour la méthode du gain à savoir que nous devons comparer la valeur actuelle de l'investissement à la valeur actuelle des cash flow.

Le taux trimestriel équivalent à 9 % l'an est selon la table T_3 : t_t = 2,178 %.

La valeur actuelle de l'investissement est selon la relation (4.1)

$$Va = a\,\frac{1-(1+t)_t^{-n}}{t_t} = 250\,000 \text{ x } 16{,}073\,28 = 4\,018\,494{,}00$$

avec t_t = 2,178 % et n = 20 trimestres

la valeur actuelle des cash flow est selon la relation (4.1)

$$Va = a\,\frac{1-(1+t)^{-4}}{t_{-1}} = 1\,200\,000 \text{ x } 3{,}88\,965 = 4\,667\,581{,}30$$

avec t = 9 % et n = 5 ans.

ce qui montre que l'investissement est rentable, puisque la valeur actuelle de l'investissement est inférieure à la valeur actuelle des cash flow dégagés.

Exercice 8.3.32. : Choix entre investissements.

Un industriel a le choix entre 3 investissements :

1er investissement : I = 1 000 000 DH, n = 5 ans, CF = 270 000 DH/an

2ème investissement : I = 1 150 000 DH, n = 6 ans, CF = 280 000 DH/an

3ème investissement : I = 250 000 DH, n = 4 ans, CF = 310 000 DH/an

On prendra pour taux d'intérêt et d'actualisation t = 11 % l'an. Indiquer quel investissement doit-il choisir ?

Formalisons le problème posé.

Choisir entre 3 investissements

Voir l'énoncé qui est assez explicite

Nous opterons d'emblée pour la méthode de la comparaison des TIR des 3 investissements et pour ce faire nous dressons les 3 tableaux suivants :

Calcul de TIR du 1er investissement

Epoques	**t = 11 %**	**t = 10,9 %**
0	- 1 000 000,00	- 1 000 000,00
1	243 243,24	243 462,56
2	219 138,05	219 533,40
3	197 421,66	197 456,16
4	177 857,35	178 499,68
5	160 231,84	160 955,51
Gain	- 2 107,90	+ 396,30

Le TIR du 1er investissement est compris entre 10,9 et 11 %. De ce fait le 1er investissement n'est pas rentable puisque son TIR est inférieur au taux de 11 %, il doit donc être éliminé du choix.

Calcul du TIR du 2ème investissement

Epoques	t = 11 %	t = 12 %	t = 12,10 %
0	- 1 150 000,00	- 1 150 000,00	- 1 150 000,00
1	252 252,25	249 999,98	249 776,96
2	227 254,27	283 214,25	222 816,18
3	204 733,57	199 298,42	198 765,53
4	184 444,65	177 945,90	177 310,89
5	166 166,35	158 879,45	158 172,05
6	149 699,41	141 856,64	141 099,05
Total	**+ 34 550,50**	**+ 1 193,70**	**- 2 059,40**

Le TIR du 2ème investissement est compris entre 12 et 12,1 %.

Calcul du TIR du 3ème investissement

Epoques	t = 11 %	t = 11,50 %	t = 11,60 %
0	- 950 000,00	- 950 000,00	- 950 000,00
1	279 279,27	278 026,87	277 777,76
2	251 602,94	249 351,42	248 904,78
3	226 559,31	223 633,53	223 032,94
4	204 206,58	200 568,16	199 850,29
Total	**+ 11 758,10**	**+ 1 579,98**	**- 434,23**

Le TIR du 3ème investissement est compris entre 11,50 et 11,60 %.

Nous pouvons dire que le 2ème investissement est le plus rentable des 3 investissements.

Remarque : Pour prendre une décision, il ne nous a pas été nécessaire de calculer exactement le TIR des 3 investissements.

En effet, nous avons éliminé le 1er investissement parce qu'il n'était pas rentable et nous avons déterminé des fourchettes pour les TIR des deux autres investissements pour savoir que le TIR du 2ème investissement est supérieur au 3ème.

Exercice 8.3.33. : Rentabilité d'un investissement.

Un industriel contracte un emprunt pour l'achat de machines. Il propose à la banque qui accepte des remboursements, sur 5 ans, égaux successivement à 100 000 DH ; 120 000 DH ; 150 000 DH ; 250 000 DH et 280 000 DH.

Les cash flow escomptés de la production des machines sont, pour 5 années, durée amortissement des machines de : 50 000 DH ; 60 000 DH ; 200 000 DH et 320 000 DH.

Montrer si cet investissement est rentable moyennant un taux d'actualisation de 10 %.

Quelle est la valeur d'achat des machines ?

Quel est le TIR de cet investissement ?

Formalisons le problème posé.

Montrer si l'investissement I est rentable si I_1 = 100 000 DH ; I_2 = 120 000 DH ; I_3 = 150 000 DH ; I_4 = 200 000 DH et I_5 = 280 000 DH.

CF_1 = 50 000 DH ; CF_2 = 60 000 DH ; CF_3 = 200 000 DH ; CF_4 = 270 000 DH et CF_5 = 320 000 DH.

n = 5 et t = 10 %.

Calculer la valeur de l'investissement

Calculer le TIR de l'investissement

Pour ce faire dressons le tableau suivant :

Epoques	**Investissement**		**Cash flow**	
	Montants	**Actualisation**	**Montants**	**Actualisation**
0	-	-	-	-
1	100 000	90 909,09	50 000	45 454,54
2	120 000	99 173,55	60 000	49 586,78
3	150 000	112 697,22	200 000	150 262,96
4	200 000	136 602,69	270 000	184 413,63
5	280 000	173 857,97	320 000	198 694,82
Total	**-**	**613 240,52**	**-**	**628 412,73**
Gain	**15 172,21**			

D'après ce tableau on peut exclure :

- que l'investissement est rentable du fait que le gain est positif ;
- que la valeur des machines à l'achat est 613 240,52 DH, somme des valeurs actuelles des montants payés par l'industriel.

Calculons maintenant le TIR de cet investissement en dressant le tableau suivant :

Epoques	**Dépense**	**Cash flow**	**Marges nettes**	**Actualisation**		
				t = 17 %	**t = 17,5 %**	**t = 17,2 %**
0	-	-	-		-	-
1	100 000	50 000	- 50 000	- 42 735,04	- 42 553,19	- 42 662,12
2	120 000	60 000	- 60 000	- 43 830,81	- 43 458,58	- 43 681,35
3	150 000	200 000	+ 50 000	31 218,53	+ 30 821,69	+ 31 058,98
4	200 000	220 000	+ 70 000	37 355,50	+ 36 723,71	+ 37 101,17
5	280 000	32 000	+ 40 000	18 244,45	17 859,56	+ 18 089,31
Gain	-	-	-	+ 252,63	- 606,81	- 94,01

Le TIR est compris entre 17 et 17,2 %

Ainsi pour $\Delta t = 0,2$ % on a $\Delta G = 346,64$

Donc pour $\Delta G = 94,01$

On aura $\Delta t = -0,2 \text{ x } \dfrac{94,01}{346,64} = -0,05$

Ce qui fait que TIR = 17,15 %

Exercice 8.3.34. : Rentabilité d'un investissement.

Le prix de machines achetées par une entreprise est de 1 000 000 DH, leur durée normale est de 10 ans.

La production escomptée de ces machines sur 7 ans donne des cash flow de 98 000 DH/an.

Montrer si cet investissement est rentable sachant que l'entreprise ne dispose que de ce projet de 7 années de production.

Calculer le TIR de cet investissement.

Le taux d'intérêt du marché est de 9 %.

Formalisons le problème posé.

Montrer que l'investissement est rentable si $I = 1\ 000\ 000$ DH, $n_1 = 10$ ans, $CF = 98\ 000$ DH/an, $n_2 = 7$ ans et $G = 9$ %.

Les machines ont une durée de vie de 10 ans alors que le projet de production ne concerne que 7.

Dans ce cas nous devons considérer les amortissements des 3 dernières années comme valeur vénale des machines dont il faut oter la somme actualisée du montant initial du prix des machines.

Ceci revient au fait comme si les machines donnaient des cash flow pendant les années 8, 9 et 10, égaux au montant de leurs amortissements.

Nous considérons, pour simplifier nos calculs, un amortissement constant des machines égal à 100 000 DH/an.

Dressons donc le tableau suivant :

Epoques	Dépenses	Cash flow	Marge nette	Actualisation		
				t = 9 %	t = 15 %	t = 16 %
1	100 000	98 000	- 2 000	- 1 834,86	- 1 739,13	- 1 724,14
2	100 000	98 000	- 2 000	- 1 683,36	- 1 512,29	- 1 486,33
3	100 000	98 000	- 2 000	- 1 544,37	- 1 315,03	- 1 281,32
4	100 000	98 000	- 2 000	- 1 416,85	- 1 143,51	- 1104,58
5	100 000	98 000	- 2 000	- 1 299,86	- 994,35	- 952,23
6	100 000	98 000	- 2 000	- 1 192,53	- 864,66	- 820,88
7	100 000	98 000	- 2 000	- 1 094,07	- 751,87	- 707,66
8		100 000	100 000	+ 5 018,66	+ 3 269,02	+ 3 050,25
9		100 000	100 000	+ 4 604,28	+ 2 842,62	+ 2 629,53
10		100 000	100 000	+ 4 224,11	+ 2 471,85	+ 2 266,84
Gain	-	-	-	3 781,10	262,65	- 130,52

D'après ce tableau on ne peut conclure que :

- l'investissement est rentable du fait que le gain est positif, pour t = 9 %.
- le TIR est compris entre 14 et 15 %.

Pour $\Delta t = 1$ % on a $\Delta G = 393{,}17$

Pour $\Delta G = 130{,}52$

On aura $\Delta t = -1\,\% \cdot \dfrac{130{,}52}{393{,}17} = 0{,}33$

Donc TIR = 15,67 %.

Exercice 8.3.35. : Rentabilité d'un investissement.

Une entreprise finance l'achat de machine en contractant un emprunt sur 5 ans payable par trimestrialité de 15 000 DH.

Cet investissement génère ; pour l'entreprise des cash flow de 20 000 DH/an sur 7 années.

Calculer le prix des machines à l'achat

Montrer si cet investissement est rentable sachant que la durée de vie des machines et 10 ans et que le taux d'intérêt est 9 % l'an.

Formalisons le problème posé

Calculer I si a = 15 000 DH ; n = 20 et t = 9 %.

Montrer que l'investissement est rentable si I, CF = 20 000 DH/an ; n = 7 ans.

Calculons le prix à l'achat des machines.

La relation (4.1) donne

$$I = Va = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t_t}$$, t_t : taux d'intérêt trimestriel

avec t_t = 2,178 % pour un taux annuel t = 9 % d'après la table financière T3.

I = 16,085 665 x 15 000 = 241 284,97 DH

Comme la durée de vie de machines est 10 ans et que le projet n'est calculé que pour 7 ans, on considérera que les amortissements des 3 dernières années ne sont pas consommés. Ils peuvent donc être pris comme des cash flow exactement comme nous avons fait dans l'exercice 8.3.34.

Nous pouvons dresser le tableau suivant en considérant des amortissements constants.

Epoques	**Amortissements**	**Cash flow**	**Montant net**	**Actualisation**		
				t = 9 %	**t = 18 %**	**t = 19 %**
1	24 128,50	20 000,00	- 4 128,50	- 3 787,61	- 3 498,73	- 3 469,33
2	24 128,50	20 000,00	- 1 128,50	- 3 474,88	- 2 965,02	- 2 915,40
3	24 128,50	20 000,00	- 4 128,50	- 3 187,96	- 2 512,73	- 2 449,92
4	2 4128,50	20 000,00	- 4 128,50	- 2 924,73	- 2 129,43	- 2 058,75
5	24 128,50	20 000,00	- 4 128,50	- 2 683,24	- 1 804,61	- 1 730,05
6	24 128,50	20 000,00	- 4 128,50	- 2 461,69	- 1 529,33	- 1 453,82
7	24 128,50	20 000,00	- 4 128,50	- 2 258,43	- 1 296,04	- 1 221,70
8	-	24 128,50	24 128,50	+ 12 109,88	+ 6 419,10	+ 6 000,05
9	-	24 128,50	24 128,50	+ 11 109,43	+ 5 439,92	+ 5 042,06
10	-	24 128,50	24 128,50	+ 10 192,14	+ 4 610,10	+ 4 237,02
Gain	-	-	-	+ 12 632,91	733,23	- 19,84

L'investissement est rentable du fait que

- le gain est positif, au taux de 9 %.
- le TIR est supérieur au taux d'intérêt 9 %, il est presque égal à 19 %.

BIBLIOGRAPHIE

Comment évaluer la rentabilité des investissements ?	B. ABLEY / P. ROBEN	CLET 89
Comprendre les mathématiques financières	D. SCHLACTHER	HACHETTE SUP
Mathématiques financières	C. D. CRAPSKY	BREAL 96
Mathématiques financières	E. FAVRO	DUNOD 91
Mathématiques financières	K. LOUINEAU	DUNOD 92
Mathématiques financières	K. LOUINEAU	DUNOD 92
Mathématiques financières	P. BONNEAU	DUNOD 88
Mathématiques financières	W. MACIERI	SIREY
Mathématiques financières	W. O'SHAUGHNESS	SMG 91
Mathématiques financières	E. FAVRO	DUNOD 91
Mathématiques financières : corrigés	M. CHAHIB	FOUCHER 97
Mathématiques financières : cours-exercices	M. CHAHIB	FOUCHER 97
Mathématiques financières et recherche opérationnelle en techniques quantitatives de gestion	C. MAURICE BAUMONT	ELLIPSES 90
Mathématiques financières : exercices corrigés (avec rappels de cours)	M. BOISSONNADE	DUNOD 99
Mathématiques financières : sujets et corrigés	M. CHAHIB	FOUCHER 97
Mathématiques financières : travaux pratiques énoncés et solutions	W. MACIERI	SIREY

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur **Mohamed IDRISSI KAITOUNI,** professeur à l'**Ecole Hassania des Travaux Publiques** de CASABLANCA pour avoir suivi, avec patience, l'élaboration de ce travail et avoir bien voulu le corriger, régulièrement.

Mes remerciements vont, aussi à ma femme **Michèle** qui a beaucoup apporté dans la correction de ce travail et à Mademoiselle **Jamila ATIF**, notre secrétaire, à l'Institut supérieur du Génie Appliqué (**I.G.A.**), pour avoir réalisé la saisie et la mise en page de ce livre conformément à mes souhaits.

Enfin je remercie tout le personnel de l'**Imprimerie CARTOGRAPHIC** qui n'a lésiné sur aucun effort pour que cet ouvrage puisse être entre les mains de ses lecteurs dans les meilleures conditions.